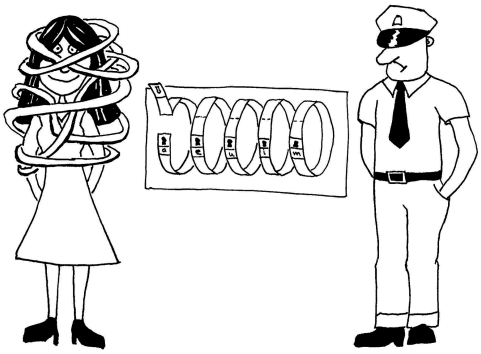
PET PRIJATELJICA I OGRLICA

MATE PULJIZ



Promotrimo sljedeći problem. Pet prijateljica: Ana, Ena, Una, Ina i Martina, kupile su zajednički vrijednu ogrlicu. Ogrlica nema kopču i presjecanje bi ju posve obezvrijedilo. Srećom, postoji banka specijalizirana za čuvanje ovakvih ogrlica. „Sefovi” u ovoj banci, zapravo su lokoti sigurno učvršćeni u zidu i ogrlice se čuvaju tako da se jednostavno objese na lokote koji se onda čvrsto zabrtve. Prijateljice imaju, jedan do drugog, sefove u ovoj banci. Postavlja se sljedeće pitanje: Postoji li način na koji prijateljice mogu objesiti ogrlicu o svojih pet lokota*, tako da kad bilo koja od njih poželi nositi ogrlicu, jednostavno dođe u banku, otključa svoj lokot a ogrlica spadne i s preostala 4 lokota (iako ona ostanu zabrtvljena).

1. Kodiranje

Da bi smo lakše predočili što se zapravo od nas traži, korisno je promotriti jednostavniji problem. Što ako bi imali dvije prijateljice (za jednu je problem trivijalan). U tom slučaju možete pokušati problem riješiti na ruke. Uzmite konopac i svežite mu dva kraja da dobijete „ogrlicu”. Umjesto dva lokota, poslužiti će dvije boce na stolu ili dva čavla u zidu. Kad je „lokot” zaključan onda konopac ne smije prelazit preko glave čavla, odnosno preko vrha boce. Ako postavite konopac kao na slici 1 onda bilo da maknete lijevu, bilo desnu bocu, konopac će odmah skliznuti i s one druge. To je rješenje problema za dvije prijateljice.

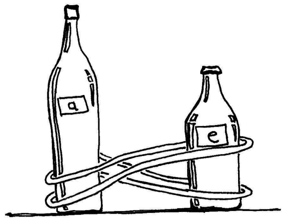
Zadatak ćemo zapravo rješavati grubom silom. Promotrit ćemo sve moguće konfiguracije lokota i ogrlice, i onda izdvojiti one koji rješavaju problem. Ali kako promotriti sve konfiguracije? Notacija je ključna. Prvo uočimo da nije važno koliko smo čvrsto namotali konopac, ili je on možda labavo namotan. Zapravo ne bismo uopće htjeli razlikovati sve pozicije koje ogrlica može zauzeti u prostoru nakon što su svih 5 lokota zaključani. Sve te pozicije smatramo istima zato jer ako je jedna rješenje, onda će i nakon što malo pomaknemo ogrlicu ili je više stegnemo, to i dalje biti rješenje. Odnosno neće, ako niti na početku nije bilo. Zanima nas samo kako je ogrlica namotana oko lokota.

Ideja je jednostavna. Neka je ogrlica nekako namotana na lokote koji su zabrtvljeni. Izaberimo neku točku na ogrlici, i „šetajmo” po njoj u jednom od dva smjera. Svaki put kad prođemo kroz Anin lokot slijeva na desno označimo to s a, a kad prođemo zdesna na lijevo označimo to s A. Za ostale djevojke koristimo početna slova njihovih imena. Gotovi smo kad se vratimo do početne točke. Dobivena će

U engleskoj literaturi (vidi u [2] i [3]) je problem poznat pod nazivom 'Picture hanging problem'. Naša formulacija je matematički ekvivalentna.

*Prešutna pretpostavka čitavo vrijeme jest da je ogrlica dovoljno duga i tanka tako da je, na primjer, moguće da je ogrlica namotana 100 puta na Anin lokot a onda još 99 puta na Martinin u obratnom smjeru.

„riječ" ovisiti i o izabranom smjeru i o početnoj točki, no to nas ne brine. Na ovaj način smo postigli da svaku konfiguraciju možemo zapisati (na nekoliko različitih načina) kao konačni niz slova. Očigledno je da vrijedi i obratno. Svaki niz slova iz skupa $\{a, A, e, E, u, U, i, I, m, M\}$ predstavlja „recept" za neku konfiguraciju. Neki od mogućih načina zapisivanja konfiguracije sa slike 1 su $EaeA$, $aEAe$, $aeAE$, $EAea$, ... Radi jednostavnosti, uzastopna pojavljivanja istog znaka označavamo brojem u eksponentu pa za $uuEEEeeM$ pišemo $u^2E^3e^2M$.



Slika 1

Uočimo da nakon što zaključamo npr. Anin lokot, prestajemo razlikovati konfiguraciju aA od konfiguracije u kojoj je ogrlica slobodna od lokota, tj. kao da ju nismo ni namotavali. Jasno da su i konfiguracije a^3A^2, a, odnosno Aa^2 sve jednake. Vidimo da naši simboli slijede uobičajena pravila algebre za potencije pa nadalje umjesto A pišemo a^{-1}, a za npr. AAA pišemo a^{-3}. Slično i za E, U, I, M. Gornje razmatranje zapravo kaže da kad god se u nekoj konfiguraciji pojave dva ista slova jedno za drugim, onda možemo njihove eksponente zbrojiti kao kod potencija. K tome a^0, e^0, i^0, u^0, m^0 sve označavaju „slobodnu ogrlicu" (ili praznu riječ) i kad se pojave unutar druge riječi možemo ih samo izostaviti.

2. Rješenje i generalizacija

Sada kad imamo notaciju, promotrimo što se događa kad Una poželi nositi ogrlicu. Ona otključava svoj lokot, i svi namotaji s njega spadaju i raspetljavaju se. Čvor koji je ostao na preostala 4 lokota možemo opet na gornji način zapisati koristeći slova $\{a, e, i, m\}$. No, istu stvar ćemo dobiti ako iz početne riječi koja predstavlja čvor na 5 lokota pobrišemo sva pojavljivanja slova u zajedno s njegovim (bilo pozitivnim, bilo negativnim) eksponentima. Tako ako smo krenuli od konfiguracije $m^2au^{-4}m^{-1}e^{-1}i^{17}uma^{-1}u^{-9}eu$, nakon što Una otključa svoj lokot ostajemo s konfiguracijom $m^2am^{-1}e^{-1}i^{17}ma^{-1}e$.

Konfiguracija koja bi rješila zadatak, bila bi ona u kojoj nakon brisanja pojavljivanja bilo kojeg od 5 slova preostale riječi su sve trivijalne. To se, naizgled, čini nemoguće. Ako bi brisanjem slova a trebala ostati prazna konfiguracija to znači da sam krenuo od konfiguracije u kojoj je bilo samo slovo a, zar ne? Pa, ne baš. Pogledajmo naprimjer konfiguraciju $aea^{-1}e^{-1}$ (to je ona sa slike 1). Matematičko opravdanje da to nije trivijalna konfiguracija bi nas odvelo jako daleko, stoga ću se zadovoljiti da vas uputim da pokušate napraviti takav čvor s konopcem i lokotima (ili bocama) u uvjerite se da on nije odvezan. Ogrlica na taj način „zavezana" je sigurna od lopova, ukoliko su oba lokota zabrtvljena. No, ako otključamo bilo koji od dva lokota, ona se odveže i s onog drugog. Ako izbrišemo pojavljivanja slova a ostajemo s ee^{-1} što je kako smo prije zaključili slobodna ogrlica. Slično ako izbrišemo e.

Problem smo sveli na nešto što bi se moglo riješavati i računalom. Treba ispisati sve riječi do neke zadane duljine i onda provjeravamo koje od njih zadovoljavaju gornje svojstvo. Trebalo bi se osigurati da u obzir uzimamo samo riječi koje same već nisu trivijalne poput $m^{-2}iaa^{-1}i^{-1}u^{-5}u^5e^{-1}em^2$.

Na skupu riječi možemo definirati binarnu operaciju „nadoveži prvu riječ na drugu" koju ćemo oznavati točkom „$\cdot$". Tako je $e^2m \cdot m^{-5}u = e^2mm^{-5}u$ a ovo je pak ekvivalentno konfiguraciji $e^2m^{-4}u$. Za danu riječ R s R^{-1} označimo riječ dobivenu tako da pročitamo R zdesna nalijevo a onda zamjenimo predznake svih eksponenata. Npr. za $R = m^2u^{-1}a$ je $R^{-1} = a^{-1}um^{-2}$. Uvjerite se da nadovezivanjem u bilo kojem poretku riječi R i R^{-1} (nakon reduciranja) dobivamo praznu riječ.

Nakon što smo uveli ovaj zapis nije teško vidjeti da ukoliko imamo rješenje problema za n djevojaka (označimo ih s $d_1, \ldots, d_n$, i neka je ta konfiguracija zapisana kao riječ R) onda je $R \cdot d_{n+1} \cdot R^{-1} \cdot d_{n+1}^{-1}$ rješenje za $n+1$ djevojku. Naime, ako izbrišemo iz nje bilo koje od početnih $d_1, \ldots, d_n$ slova (s njihovim eksponentima), zbog toga što je R rješenje problema za n djevojaka, ova riječ postaje $d_{n+1} \cdot d_{n+1}^{-1}$ odnosno daje trivijalnu konfiguraciju. Ukoliko izbrišemo pojavljivanja d_{n+1} iz nje, ostaje nam $R \cdot R^{-1}$ što je opet trivijalna konfiguracija.

Slijedeći gornji postupak dobivamo tablicu 1:

Broj prijateljica	**Rješenje**
2 (Ana i Ena)	$aea^{-1}e^{-1}$
3 (Ana, Ena i Una)	$aea^{-1}e^{-1}ueae^{-1}a^{-1}u^{-1}$
4 (bez Martine)	$aea^{-1}e^{-1}ueae^{-1}a^{-1}u^{-1}iuaea^{-1}e^{-1}u^{-1}eae^{-1}a^{-1}i^{-1}$
5 (sve)	$aea^{-1}e^{-1}ueae^{-1}a^{-1}u^{-1}iuaea^{-1}e^{-1}u^{-1}eae^{-1}a^{-1}i^{-1}m\ldots$ $\ldots iaea^{-1}e^{-1}ueae^{-1}a^{-1}u^{-1}i^{-1}uaea^{-1}e^{-1}u^{-1}eae^{-1}a^{-1}m^{-1}$

Tablica 1

Čini se da gornje konfiguracije zbilja jesu rješenja, no nismo dali opravdanje da gornje konfiguracije nisu zapravo trivijalne. Doduše u njima nema pojavljivanja istih slova kao susjeda, pa su u tom smislu one *reducirane riječi*, ali to nije garancija da je ogrlica zavezana oko lokota na taj način uistinu sigurna. Možda će, ako malo olabavimo namotaje, ogrlica spasti s lokota (iako oni ostanu zatvoreni). To ipak nije slučaj. Ponovno, određena količina matematike stoji iza toga. Najbolje što ovdje mogu reći, jest uputiti vas da napravite gornje čvorove (s lokotima i konopcem) i uvjerite se eksperimentalno da, ma koliko se trudili, nećete moći skinuti konopac s lokota bez da barem jednog otvorite.

3. Umjesto zaključka

Za one koje matematika više zanima, ili koje je ovaj članak možda potakao da saznaju više, htio bih upozoriti na nekoliko važnih koncepata koji se kriju u gornjem problemu. Struktura koju čine nizovi slova, tzv. *riječi* zajedno s operacijom nadovezivanja (uz male tehničke korekcije) je *slobodna grupa* reda 5. Zapravo, ta grupa je *fundamentalna grupa* prostora koji dobijemo kad iz Euklidskog prostora $\mathbb{R}^3$ izbacimo 5 disjunktnih kružnica (odnosno lokota). U ovim činjenicama se krije opravdanje da gore promatrani čvorovi nisu trivijalni, odnosno da kad su svih 5 lokota zabrtvljeni ogrlica nemože spasti s njih. Ova ideja pridruživanja algebarskog objekta, topološkom često je korištena i vrlo plodonosna u matematici. Na taj način ponekad vrlo apstraktne probleme topologije, prenosimo na dobro razvijen jezik algebre u kojem „znamo računati" a to ponekad može voditi rješenju.

Za kraj jedno pitanje. Postoji li jednostavnija konfiguracija rješenja problema od one koja je dobivena preko komutatora.† Neka duljine manje od 46 slova? To se može provjeriti računalom. Pokušajte!

Literatura

[1] A. Hatcher: *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.
`http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html`

[2] L. McInnes: *Picture hanging problem*
`http://jedidiah.stuff.gen.nz/link_problem.pdf`

[3] D. Ploog: *The best way how not to hang pictures on walls – Topology in school*
`http://www.mathematik.hu-berlin.de/~ploog/topology_in_school.pdf`

†Komutator riječi R_1 i R_2 je riječ $R_1 \cdot R_2 \cdot R_1^{-1} \cdot R_2^{-1}$.