SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Mate Puljiz

PROSTOR POMAKA I POMAK KAO DINAMIČKI SUSTAV

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Sonja Štimac

Zagreb, 2012

Želim zahvaliti svima onima koji su posredno ili neposredno odgovorni za nastanak ovog rada. Na prvom mjestu hvala mentorici, prof. Sonji Štimac, na zanimljivoj temi, korisnim savjetima i pažljivom iščitavanju prvih verzija onoga što se nalazi na idućim stranicama. Hvala učiteljicama i učiteljima koji su u meni pobudili i održali zanimanje za matematiku; Ivani Stanić, Ivanu Pavloviću, Mariji Mimici, Dubravki Čikeš, Ivani Milanović kao i svim profesoricama i profesorima matematičkog odsjeka Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Naposljetku, hvala mojim roditeljima, obitelji i prijateljima na bezuvjetnoj podršci.

Hvala Vam!

Sadržaj

Sadržaj **iii**

Uvod **1**

1 Prostori pomaka **2**
1.1 Motivacija 2
1.2 Puni pomak 3
1.3 Metrizacija prostora pomaka 5
1.4 Prostori pomaka 6
1.5 Jezik 9
1.6 Preslikavanja na prostorima pomaka 11
1.7 Pomak konačnog tipa 15

2 Dinamika na prostoru pomaka **18**
2.1 Osnovni pojmovi teorije dinamičkih sustava 18
2.2 ω-granični skupovi u prostoru pomaka 20
2.3 Sofički pomak 24
2.4 Dva primjera sofičkog prostora pomaka 29
2.5 ω-granični skupovi šatorskog preslikavanja 30

Bibliografija **35**

Uvod

U ovom radu cilj mi je dati uvod u teoriju simboličke dinamike i ukazati na neke njene primjene u teoriji dinamičkih sustava. Osnovna ideja jest da se dinamika unimodalnih preslikavanja na segmentu često može poistovjetiti s preslikavanjem pomaka na prostoru dvostrano ili jednostrano beskonačnih nizova nad nekim konačnim alfabetom. To znači da se među njima može uspostaviti topološka konjugacija koja omogućava da se svi matematički problemi i zaključci prenose iz jednog konteksta u drugi.

U prvom poglavlju izlažem onovne pojmove, definicije i rezultate simboličke dinamike uglavnom prateći [LM95]. U drugom poglavlju promatramo detaljnije dinamiku na prostorima pomaka i izlažem rezultat iz [BGKR10] koji daje karakterizaciju ω-graničnih skupova u prostorima pomaka konačnog tipa.

Poglavlje 1

Prostori pomaka

1.1 Motivacija

U primjenama, a i u teorijskim razmatranjima često smo u situaciji da promatramo neki sustav kojeg bismo željeli *opisati*, odnosno *razumjeti njegovo ponašanje*. Namjerno nećemo biti odmah matematički precizni po pitanju što je to sustav i što bi točno značilo opisati ga. Zapravo je česta pojava da nam je sam sustav *skriven*, a da mi vidimo samo neke njegove manifestacije kojih je konačno mnogo.

Možemo za predodžbu uzeti da promatramo tok vode u nekoj cijevi. Htjeli bismo razumjeti što se događa s česticom peluda kad ga bacimo negdje u tu cijev. Koja je njegova putanja. Jasno je da bi u ovom slučaju *razumijevanje sustava* značilo da za svaku moguću početnu poziciju peluda kažemo koja će biti njegova *trajektorija*. Zapravo ono što nas zanima je *tok* (ili *fluks*) fluida kroz cijev. No, realno je pretpostaviti da nismo u mogućnosti mjeriti točnu poziciju peluda u svakom trenutku ili nas niti ne zanima rješavanje tako kompleksnog problema, pa si postavljamo (nadamo se) jednostavniji cilj. Podijelimo cijev na dva dijela i jedan označimo s 0, a drugi s 1. I sada za svaku početnu poziciju peluda, promatramo u kojem se dijelu cijevi ona nalazi u trenucima $0, 1, 2, \dots$ Tako smo svakoj početnoj poziciji pridružili binarni niz (kasnije ćemo ga zvati *itinerarom*), koji još uvijek sadrži bitne informacije o trajektoriji čestice. Jasno da povećavanjem broja *stanja* u kojem se sustav može nalaziti povećavamo detaljnost opisa sustava, jasno, po cijenu teže analize.

Uz pretpostavku da se sustav ne mijenja kroz vrijeme (*stacionarnost sustava*) vidimo da protjecanje vremena odgovara upravo pomicanju itinerara slijeva na desno, tj. ako čestica A bačena u trenutku 0 na poziciju x ima itinerar $t_0t_1t_2\dots$ onda čestica B bačena na poziciju gdje se A nalazi u trenutku 1 ima itinerar $t_1t_2t_3\dots$ Stoga je prirodno definirati *preslikavanje pomaka* kao funkciju σ koja $t_0t_1t_2\dots$ preslikava u $t_1t_2t_3\dots$

Ako još dozvolimo i negativan protok vremena, odnosno dopustimo da za svaku poziciju u kojoj se čestica našla imamo neku prošlu poziciju iz koje je čestica došla, onda su itinerari dvostrano beskonačni nizovi čije negativne koordinate govore o prošlosti, pozitivne o budućnosti, a nulta koordinata o trenutnoj poziciji čestice.

U ovom poglavlju, uvesti ćemo pojam prostora pomaka upravo kao prostor dvostrano beskonačnih nizova nad konačnim skupom slova. Definiramo i preslikavanje pomaka i dokazujemo neke osnovne činjenice o njemu.

1.2 Puni pomak

Neka je $\mathcal{A}$ konačan neprazan skup čije elemente ćemo zvati *simbolima* ili *slovima*. U pravilu uzimamo da je $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, \ldots, r-1\}$ za neki fiksirani $r \in \mathbb{N}$. Skup $\mathcal{A}$ zovemo *alfabetom*.

Definicija 1.2.1. *Neka je $\mathcal{A}$ konačan alfabet.* ***Puni $\mathcal{A}$-pomak*** *je skup svih funkcija iz cijelih brojeva u skup $\mathcal{A}$.* ***Puni r-pomak*** *(ili kraće* ***r-pomak****) je puni prostor pomaka nad alfabetom $\{0, 1, \ldots, r-1\}$.*

Uobičajena oznaka za puni $\mathcal{A}$-pomak je

$$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}} = \{x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} : x_i \in \mathcal{A} \text{ za sve } i \in \mathbb{Z}\} \tag{1.1}$$

Vidimo da zapravo elemente prostora pomaka možemo shvaćati kao dvostrano beskonačne nizove slova alfabeta $\mathcal{A}$. U skladu s tim elemente prostore pomaka pisat ćemo kao

$$x = \ldots x_{-2}x_{-1}.x_0x_1x_2\ldots, \tag{1.2}$$

gdje nam točka služi da bismo označili nultu poziciju. Tako, na primjer

$$x = \ldots 010.1101\ldots \tag{1.3}$$

znači da je $x_{-3} = 0, x_{-2} = 1, x_{-1} = 0, x_0 = 1, x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1$, i tako dalje. Elemente punog 2-pomaka zovemo još i **binarnim nizovima**.

Važnu ulogu imat će *blokovi* (ili *riječi*), konačni nizovi simbola[1] iz $\mathcal{A}$. Pisat ćemo ih bez razdvajanja znakova. Primjer riječi nad alfabetom $\mathcal{A} = \{a, b\}$ je $aababbabbb$. Od koristi će biti i niz bez simbola, tzv. *prazna riječ* (ili *prazni blok*) koju označvamo s ε. *Duljina* bloka u je broj simbola koje taj blok sadrži i označavamo ju s $|u|$. Tako je $|a_1a_2\ldots a_k| = k$, a $|\varepsilon| = 0$. Blok duljine k zovemo i *k-blokom*. Skup svih k-blokova označavamo s $\mathcal{A}^k$. *Podblok* (ili *podriječ*) bloka $u = a_1a_2\ldots a_k$ je blok oblika

$$a_ia_{i+1}\ldots a_j, \text{ gdje je } 1 \leq i \leq j \leq k. \tag{1.4}$$

[1]Zapravo su to uređene n-torke nad alfabetom $\mathcal{A}$.

Također podrazumijevamo i da je ε podblok svakog bloka.

Pojam bloka (ili riječi) ponekad ćemo koristiti i u širem smislu za točku iz $\mathcal{A}$ ili njen lijevi, odnosno desni rep. U tom slučaju stavljamo da je duljina bloka ∞.

Za element $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ i $i \leq j$ definiramo podblok s koordinatama od pozicije i do pozicije j u oznaci

$$x_{[i,j]} = x_i x_{i+1} \dots x_j. \tag{1.5}$$

Ako je $i > j$ stavljamo da je $x_{[i,j]} = \varepsilon$. Također će biti korisno definirati i

$$x_{[i,j)} = x_i x_{i+1} \dots x_{j-1}. \tag{1.6}$$

Prirodno je onda s $x_{[i,\infty)}$ označiti desni beskonačni rep od x koji počinje od koordinate i, i slično za lijevi rep koji završava s koordinatom i koristimo oznaku $x_{(-\infty,i]}$.

Centralni $(2k+1)$*-blok od* x je $x_{[-k,k]} = x_{-k}x_{-k+1} \dots x_k$. Ponekad ćemo x_i pisati kao $x_{[i]}$, posebno kada želimo naglasiti da mislimo na blok duljine 1.

Gornje oznake možemo prirodno prenijeti i na konačne blokove. Naime, ako je $u = a_0 a_1 \dots a_{k-1}$ blok onda imamo:

$$u_{[i,j]} = a_i a_{i+1} \dots a_j, \text{ za } 0 \leq i \leq j < k$$
$$u_{[i,j)} = a_i a_{i+1} \dots a_{j-1}, \text{ za } 0 \leq i < j \leq k.$$

Dva bloka možemo *konkatenirati* (odnosno slijepiti) tako da ih naprosto napišemo jednog uz drugog. Pri tome je bitan poredak kojim nadovezujemo riječi. Za dva bloka u i v formiramo novi blok uv duljine $|uv| = |u| + |v|$. Dogovorno stavljamo da je $\varepsilon u = u\varepsilon = u$. Za $n \geq 1$ u^n označava n-struku konkatenaciju bloka u sa samim sobom. Stavljamo da je $u^0 = \varepsilon$. Točku $\dots uuuu.uuu \dots$ označavamo s u^∞.

Definicija 1.2.2. ***Preslikavanje pomaka $\boldsymbol{\sigma}$*** *(ili kraće* ***pomak****) na prostoru punog pomaka $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ definiramo relacijom*

$$\sigma(x) = y \text{ , gdje je } y \text{ takav da je } y_i = x_{i+1} \text{ za sve } i \in \mathbb{Z}. \tag{1.7}$$

Ukoliko je $x = \dots x_{-2}x_{-1}.x_0x_1x_2 \dots$ onda je $\sigma(x) = \dots x_{-2}x_{-1}x_0.x_1x_2 \dots$ pa preslikavanje pomaka zapravo samo pomiče točku za jedno mjesto udesno, odnosno čitav niz x pomiče za jedno mjesto ulijevo. Kompozicija $\sigma^k = \sigma \circ \sigma \circ \dots \circ \sigma$ onda pomiče čitav niz za k mjesta ulijevo.

Očigledno je σ bijekcija na skupu $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ pa je dobro definiran inverz σ^{-1} koji pomiče niz x jedno mjesto udesno, a onda $\sigma^{-k} = (\sigma^{-1})^k$ pomiče niz za k mjesta udesno. Kako smo u uvodu naglasili, preslikavanje pomaka odgovara upravo protoku vremena.

1.3 Metrizacija prostora pomaka

Podsjetimo se definicije metričkog prostora.

Definicija 1.3.1. *Neka je M skup i ρ funkcija $\rho\colon M \times M \to [0,\infty)$ koja zadovoljava sljedeća svojstva, za sve $x, y, z \in M$:*

$$\rho(x,y) = 0 \text{ ako i samo ako je } x = y,$$
$$\rho(x,y) = \rho(y,x),$$
$$\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z).$$

*Tada kažemo da je ρ **metrika**, a uređen par (M,ρ) zovemo **metričkim prostorom**.*

Nadalje uzimamo da je alfabet $\mathcal{A}$ fiksiran.

Teorem 1.3.2. *Stavimo $M = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Funkcija $\rho\colon M \times M \to [0,\infty)$ definirana s*

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 2^{-k} & \text{ako } x \neq y \text{ i } k \geq -1 \text{ je najveći cijeli broj takav da je } x_{[-k,k]} = y_{[-k,k]}, \\ 0 & \text{ako } x = y \end{cases} \tag{1.8}$$

je metrika na M.

Napomena 1.3.3. *U slučaju kad je $x = y$ stavljamo da je najveći k za koji se x i y poklapaju u centralnom $(2k+1)$-bloku jednak ∞. Dogovorno je $2^{-\infty} = 0$ pa onda možemo uzeti da je ρ uvijek definiran prvim retkom.*

Dokaz. Jedino je netrivijalno provjeriti nejednakost trokuta. Neka je $\rho(x,y) = 2^{-k}$ i $\rho(y,z) = 2^{-l}$. To znači da je $x_{[-k,k]} = y_{[-k,k]}$ i $y_{[-l,l]} = z_{[-l,l]}$. Stoga je za $m = \min\{k,l\}$ $x_{[-m,m]} = z_{[-m,m]}$ pa je

$$\rho(x,y) \leq 2^{-m} \leq 2^{-k} + 2^{-l} = \rho(x,y) + \rho(y,z). \tag{1.9}$$

□

Topološki gledano, bazu topologije ovog prostora čine otvorene kugle radijusa $\epsilon > 0$. Očigledno je otvorena kugla radijusa $\epsilon > 0$ oko dane točke $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ točno skup svih $y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ koji se s x podudaraju u centralnom $(2k+1)$-bloku, gdje je k cijeli broj takav da je $2^{-k} < \epsilon \leq 2^{-(k-1)}$. Zbog njihove važnosti uvodimo poseban naziv za takve skupove.

Definicija 1.3.4. *Neka je $X \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ i neka je $\{k_1, k_2, \ldots, k_m\}$ neki konačan podskup od $\mathbb{Z}$ i neka su dana slova (ne nužno različita) $a_1, a_2, \ldots, a_m$ iz $\mathcal{A}$. **(Konačan) cilindar u X nad skupom koordinata $k_1, k_2, \ldots, k_m$ s bazom $a_1, a_2, \ldots, a_m$** je skup*

$$\{x \in X : x_{k_i} = a_i, \text{ za sve i=1,...,}m\}. \tag{1.10}$$

Sada je jasno da bazu topologije zapravo čine konačni cilindri. To znači da je topologija inducirana gornjom metrikom upravo produktna topologija na $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, dobivena na način da se konačan skup $\mathcal{A}$ topologizira diskretnom metrikom.[2]

Budući da je svaki konačan topološki prostor kompaktan, direktnom primjenom Tihonovljeva teorema dobivamo

Teorem 1.3.5. *$(\mathcal{A}^{Z}, \rho)$ je kompaktan metrički prostor.*

Gornja diskusija omogućuje i da jasno vidimo što znači pojam konvergencije niza unutar $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Niz $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ konvergira k $y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ ako i samo ako za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $n \geq n_0$ povlači da se $x^{(n)}$ i y podudaraju u centralnom $(2k+1)$-bloku. Odnosno, niz je konvergentan točno onda kada se svaki konačni podblok tog niza s vremenom „stabilizira" na odgovarajućem podbloku limesa.

Napomena 1.3.6. *Nije teško pokazati da se na $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ mogu definirati i razne druge metrike koje će biti evkvivalentne metrici ρ. Naravno, inducirana topologija prostora $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ ostaje ista. Npr. jedna je mogućnost staviti*

$$\rho_1(x,y) = \frac{1}{k+2}, \tag{1.11}$$

gdje je k najveći takav da je $y_{[-k,k]} = x_{[-k,k]}$, a istu topologiju inducira i metrika

$$\rho_2(x,y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{h(x_k,y_k)}{2^{|k|}}, \tag{1.12}$$

gdje je h Hammingova metrika na $\mathcal{A}$, tj. $h(x_k,y_k) = \begin{cases} 0 & \text{\textit{ako} } x_k = y_k, \\ 1 & \text{\textit{inače.}} \end{cases}$

Podsjetimo se i da je u metričkim prostorima neprekidnost funkcije karakterizirana preko nizovne neprekidnosti. To je posljedica činjenice da metrički prostori zadovoljavaju prvi aksiom prebrojivosti. Zapravo to znači da su neprekidne funkcije točno one koje konvergentne nizove preslikavaju ponovno u konvergentne nizove pri čemu je limes slike upravo slika limesa početnog niza.

1.4 Prostori pomaka

I kroz ovo poglavlje uzimamo da je alfabet $\mathcal{A}$ fiksiran. Do sada smo uveli prostor punog $\mathcal{A}$-pomaka $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Kako je to čest slučaj u matematici, želja nam je promatrati nove prostore koje možemo dobiti od njega. Već smo vidjeli važnost preslikavanja pomaka, pa je

[2] U teoriji kodiranja se diskretna metrika, i produktne metrike dobivene iz nje na blokovima fiksne duljine $\mathcal{A}^k$, nazivaju Hammingovim metrikama.

prirodno zahtijevati da potprostori od $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ također budu „zatvoreni” na operaciju pomaka. Pokazuje se da je za sadržajnu i lijepu teoriju potrebno postaviti još jedan zahtjev. To će biti vidljivo iz sljedećeg primjera.

Primjer 1.4.1. *Neka je $X \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ skup svih točaka koji sadrže točno jednu jedinicu, a sve ostalo su nule. Očigledno je X invarijantan na pomak, odnosno vrijedi $\sigma(X) = X$. No, X nije zatvoren potprostor od $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$. Naime, ukoliko stavimo $x^{(n)} = \ldots 000.0 \ldots 01000 \ldots$, gdje je jedinica upravo na n-toj koordinati, vidimo da taj niz konvergira k 0^{∞} No taj limes nije unutar X pa to znači da prostor X nije zatvoren.*

Napomena 1.4.2. *U gornjem smo primjeru spomenuli pojam σ-*invarijantnosti *nekog skupa $X \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. To znači da je $\sigma(X) = X$ odnosno da za svaki element $x \in X$ $\sigma(x)$ i $\sigma^{-1}(x)$ ostaju u prostoru X.*

Motivacija iza zahtjeva da potprostori koje ćemo promatrati moraju biti zatvoreni leži u činjenici da želimo detektirati prisutnost nekog elementa u danom potprostoru, oslanjajući se isključivo na njegove konačne podriječi. U gornjem primjeru vidimo da se svaka podriječ elementa 0^{∞} (to su naprosto po volji dugi konačni nizovi nula) javlja i kao podriječ nekog (zapravo svakog) elementa koji jest u X. Tako da promatranjem isključivo konačnih podriječi od 0^{∞} ne možemo isključiti mogućnost da je element 0^{∞} iz X. Ova veza će se u potpunosti razotkriti u teoremu 1.4.7.

Napomena 1.4.3. *Uočimo još da je zahtjev zatvorenosti nekog podskupa od $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ ekvivalentan njegovoj kompaktnosti budući da je sâm $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ kompaktan metrički prostor.*

Uz sve gore navedeno prirodno se nameće sljedeća definicija.

Definicija 1.4.4. ***Prostor pomaka** je podskup punog pomaka $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ koji je kompaktan i σ-invarijantan.*

Kako smo i najavili, odmah ćemo karakterizirati prostore pomaka preko skupa zabranjenih riječi. No, prije toga trebat će nam još jedna definicija.

Definicija 1.4.5. *Neka je $\mathcal{F}$[3] neka kolekcija konačnih blokova nad alfabetom $\mathcal{A}$. Definiramo $X_{\mathcal{F}}$ kao skup svih elemenata iz $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ koji ne sadrže kao podriječ niti jedan blok iz $\mathcal{F}$. Skup $\mathcal{F}$ nazivamo **skupom zabranjenih blokova**.*

Napomena 1.4.6. *$\mathcal{F}$ može biti najviše prebrojiv budući da je skup svih riječi nad konačnim alfabetom prebrojiv.*

Uočimo i to da ukoliko imamo $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ onda je $X_{\mathcal{F}'} \subseteq X_{\mathcal{F}}$.

[3] Oznaka $\mathcal{F}$ dolazi od engleskog „forbidden blocks” što znači „zabranjeni blokovi”.

Teorem 1.4.7. *Neka je $X \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Tada je X prostor pomaka ako i samo ako je $X = X_{\mathcal{F}}$ za neku kolekciju $\mathcal{F}$ konačnih blokova nad $\mathcal{A}$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je X prostor pomaka. Kompaktnost nam daje otvorenost komplementa od X u $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Stoga za svaki $y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \setminus X$ postoji prirodan broj k_y takav da je cilindar nad koordinatama $-k_y, \ldots, k_y$ s bazom $y_{-k_y}, \ldots, y_{k_y}$ sadržan u $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \setminus X$. Sada stavimo

$$\mathcal{F} = \{y_{[-k_y,k_y]} : y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \setminus X\}. \tag{1.13}$$

Tvrdim da je $X = X_{\mathcal{F}}$.

Uzmimo $x \in X$ i pretpostavimo da se neka riječ iz $\mathcal{F}$ javlja kao podriječ od x, tj. da postoji cijeli broj l i y iz komplementa od X td.

$$x_{[l,l+|y_{[-k_y,k_y]}|-1]} = y_{[-k_y,k_y]}. \tag{1.14}$$

No zbog σ-invarijantnosti moralo bi biti i da je $x' = \sigma^{l+k_y}(x) \in X$, a za x' vrijedi

$$x'_{[-k_y,k_y]} = y_{[-k_y,k_y]} \tag{1.15}$$

što je kontradikcija s činjenicom da je čitav cilindar nad $y_{[-k_y,k_y]}$ izvan X.

Za dokaz suprotne inkluzije uzmimo $y \notin X$. Po konstrukciji postoji k_y takav da je $y_{[-k_y,k_y]} \in \mathcal{F}$. Stoga je jasno da y ne može biti element skupa $X_{\mathcal{F}}$.

Obratno, neka je $X = X_{\mathcal{F}}$. Treba dokazati da je $X_{\mathcal{F}}$ kompaktan i σ-invarijantan. Invrijantnost na pomak je očigledna. Da bi pokazali kompaktnost (tj. zatvorenost) uzmimo konvergentan niz $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X_{\mathcal{F}}$ s limesom $y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Tvrdim da je $y \in X_{\mathcal{F}}$. Naime, ukoliko to ne bi bio slučaj, morali bi postojati neki cijeli brojevi $i \leq j$ takvi da je blok $y_{[i,j]}$ iz $\mathcal{F}$. No, kako $x^{(n)} \to y$ onda bi za dovoljno veliki prirodni broj n_0

$$y_{[i,j]} = (x^{(n_0)})_{[i,j]} \tag{1.16}$$

pa bi to značilo da je neka podriječ od $x^{(n_0)}$ u $\mathcal{F}$ što je u kontradikciji s pretpostavkom da je $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $X_{\mathcal{F}}$. □

Primjer 1.4.8. *Iz $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}} = X_{\emptyset}$ slijedi da je puni pomak prostor pomaka. I prazan skup je prostor pomaka jer vrijedi $\emptyset = X_{\mathcal{A}}$.*

Primjer 1.4.9. *Skup svih binarnih nizova koji nemaju dvije uzastopne jedinice je prostor pomaka koji zovemo* pomak zlatnog reza. *On je jednak $X_{\{11\}}$ i primjer je pomaka konačnog tipa o čemu će biti govora kasnije.*

Primjer 1.4.10. *Neka je $S \subseteq \mathbb{N}_0$. Stavimo da je $\mathcal{F} = \{10^k1 : k \in \mathbb{N}_0 \setminus S\}$. Prostor pomaka nad alfabetom $\{0,1\}$ definiran s $X_{\mathcal{F}}$ nazivamo* pomakom S-razmaka.

Primjer 1.4.11. *Ako u prethodnom primjeru stavimo* $S = 2\mathbb{N}_0 = \{0, 2, 4, 6 \ldots\}$ *onda dobiveni prostor pomaka nazivamo* parnim pomakom.

Primjer 1.4.12. *Očigledno vrijedi* $X_{\mathcal{F}_1} \cap X_{\mathcal{F}_2} = X_{\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2}$ *pa je presjek dva prostora pomaka ponovno prostor pomaka. To je bilo očigledno i iz definicije prostora pomaka kao* σ*-invarijantnog i zatvorenog podskupa od* $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$*.*

Primjer 1.4.13. *Kao generalizaciju gornjeg primjera, pokažimo da je proizvoljan presjek prostora pomaka ponovno prostor pomaka, jednako kao konačna unija prostora pomaka. Lagano je provjeriti da su presjeci, odnosno unije,* σ*-invarijantnih podskupova opet* σ*-invarijantni, a ako se sjetimo da su proizvoljni presjeci, odnosno konačne unije, zatvorenih skupova ponovno zatvoreni onda tvrdnja slijedi iz definicije prostora pomaka.*

1.5 Jezik

U teoremu 1.4.7 smo okarakterizirali prostore pomaka preko zabranjenih blokova. Sada nam je cilj opisati ih preko dozvoljenih blokova.

Definicija 1.5.1. *Neka je* X *podskup punog* $\mathcal{A}$*-pomaka. Označimo s* $\mathcal{B}_n(X)$ *skup svih* n*-blokova koji se javljaju u elementima iz* X*.* ***Jezik od X*** *je skup*

$$\mathcal{B}(X) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n(X). \tag{1.17}$$

Za element iz $\mathcal{B}(X)$ *ponekad kažemo da se* ***javlja u*** X *ili da je* ***dopušten u*** X*.*

Nije svaka kolekcija blokova jezik nekog prostora pomaka. Sljedeća propozicija karakterizira one koje jesu i daje alternativan opis prostora pomaka preko jezika.

Propozicija 1.5.2. (1) *Neka je* X *prostor pomaka i* $\mathcal{L} = \mathcal{B}(X)$ *njegov jezik. Ako je* $w \in \mathcal{L}$*, onda je*

   (i) *svaki podblok od* w *unutar* $\mathcal{L}$*,*

   (ii) *postoje neprazni blokovi* u *i* v *u* $\mathcal{L}$ *tako da je* $uwv \in \mathcal{L}$*.*

(2) *Jezici prostora pomaka su karakterizirani s* (1)*. Tj. ako je* $\mathcal{L}$ *kolekcija blokova nad* $\mathcal{A}$ *onda je* $\mathcal{L} = \mathcal{B}(X)$ *za neki prostor pomaka* X *ako i samo ako* $\mathcal{L}$ *zadovoljava* (1)*.*

(3) *Jezik prostora pomaka u potpunosti određuje taj prostor. Zapravo vrijedi da je za svaki prostor pomaka* $X = X_{\mathcal{B}(X)^c}$*. Stoga su dva prostora pomaka jednaka ako i samo ako imaju isti jezik.*

Dokaz. (1) Ako je $w \in \mathcal{L} = \mathcal{B}(X)$, onda se w pojavljuje u nekom elementu $x \in X$. Ali onda se i svaki podblok od w također javlja u x, pa onda i u $\mathcal{L}$. Nadalje, očigledno možemo izabrati neprazne blokove u i v tako da se uwv javlja u x pa onda slijedi i da su u, v i uwv iz $\mathcal{L}$.

(2) Neka je $\mathcal{L}$ kolekcija blokova koja zadovoljava (1). Označimo s X prostor pomaka $X_{\mathcal{L}^c}$. Pokazat ćemo da je $\mathcal{L} = \mathcal{B}(X)$. Neka je $w \in \mathcal{B}(X)$. To znači da se w javlja u nekom elementu iz $X_{\mathcal{L}^c}$ pa onda $w \notin \mathcal{L}^c$, odnosno $w \in \mathcal{L}$. Dakle, $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{L}$. Obratno, neka je $w = x_0x_1 \dots x_m \in \mathcal{L}$. Uzastopnim korištenjem $(1)(ii)$ možemo pronaći simbole x_j uz $j > m$ i x_i za $i < 0$ tako da zbog $(1)(i)$ svaki podblok od $x = \dots x_{-1}.x_0x_1 \dots$ leži u $\mathcal{L}$. To znači da je $x \in X_{\mathcal{L}^c}$. Kako se w javlja u x, imamo $w \in \mathcal{B}(X)$ čime je dokazana i druga inkluzija.

(3) Ako je $x \in X$ onda se niti jedan blok koji se javlja u x ne javlja u $\mathcal{B}(X)^c$ budući da se $\mathcal{B}(X)$ sastoji od svih onih blokova koji se javljaju u elementima iz X. Stoga je $x \in X_{\mathcal{B}(X)^c}$ čime je pokazano $X \subseteq X_{\mathcal{B}(X)^c}$. Obratno, jer je X prostor pomaka onda postoji kolekcija $\mathcal{F}$ takva da je $X = X_{\mathcal{F}}$. Ako uzmemo $x \in X_{\mathcal{B}(X)^c}$ onda je svaka podriječ iz x unutar $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(X_{\mathcal{F}})$ pa ne može biti u $\mathcal{F}$. Stoga je $x \in X_{\mathcal{F}}$ čime je pokazana i druga inkluzija. □

Gornji rezultat pokazuje da, iako isti prostor pomaka možemo opisati preko različitih skupova zabranjenih blokova, postoji maksimalan (u smislu inkluzije) skup zabranjenih blokova za taj prostor pomaka. To je upravo komplement jezika ili $\mathcal{B}(X)^c$. Također ova propozicija daje 1−1 korespondenciju između prostora pomaka X i njegovog jezika $\mathcal{L}$. Točnije, vrijedi

$$\mathcal{L} = \mathcal{B}(X_{\mathcal{L}^c}), \qquad X = X_{\mathcal{B}(X)^c}\,. \tag{1.18}$$

Korisna posljedica dijela (3) propozicije 1.5.2 je ta što da bismo provjerili da je dâni dvostrano beskonačni niz x u nekom prostoru pomaka X, dovoljno je vidjeti da je svaki njegov podblok $x_{[i,j]}$ u $\mathcal{B}(X)$. Zapravo, imamo sljedeću karakterizaciju prostora pomaka u terminima dopuštenih blokova.

Korolar 1.5.3. *Neka je X podskup punog $\mathcal{A}$-pomaka. Tada je X prostor pomaka ako i samo ako za sve $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ vrijedi sljedeća implikacija*

$$(\forall i, j \in \mathbb{Z})\; x_{[i,j]} \in \mathcal{B}(X) \Rightarrow x \in X. \tag{1.19}$$

Napomena 1.5.4. *Zbog zatvorenosti jezika na uzimanje podriječi, dovoljno je provjeravati dopustivost centralnih blokova. Stoga uvjet (1.19) možemo zamijeniti s*

$$(\forall i \in \mathbb{N})\; x_{[-i,i]} \in \mathcal{B}(X) \Rightarrow x \in X \tag{1.20}$$

a da tvrdnja korolara 1.5.3 i dalje vrijedi.

Za kraj ovog poglavlja još uvedimo definiciju ireducibilnog prostora pomaka.

Definicija 1.5.5. *Prostor pomaka X je **ireducibilan** ako za svaki uređen par blokova $u, v \in \mathcal{B}(X)$ postoji $w \in \mathcal{B}(X)$ tako da je $uwv \in \mathcal{B}(X)$.*

1.6 Preslikavanja na prostorima pomaka

Od preslikavanja na prostorima pomaka do sada smo spomenuli samo preslikavanje σ i njegove potencije. Sada ćemo promotriti i neka druga preslikavanja. Od presudne važnosti su ona neprekidna preslikavanja koja komutiraju sa σ. Ovdje nam je cilj dati jednostavnu karakterizaciju takvih preslikavanja.

Definicija 1.6.1. *Neka je X prostor pomaka nad alfabetom $\mathcal{A}$ i neka je $\mathcal{U}$ konačan skup (koji ovdje igra ulogu novog alfabeta). Neka su $m, n \in \mathbb{N}_0$ fiksni i neka je dana funkcija $\Phi : \mathcal{B}_{m+n+1}(X) \to \mathcal{U}$. Defniramo preslikavanje $\phi\colon X \to \mathcal{U}^{\mathbb{Z}}$ s*

$$(\phi(x))_i = \Phi(x_{[i-m,i+n]}). \tag{1.21}$$

*Preslikavanje ϕ zovemo (m, n)-**blok kodom** i pišemo $\phi = \Phi^{\infty}$.*

Intuitivno, (m, n)-blok kôd djeluje na način da čita ulazni element kao beskonačnu traku pri čemu ima mogućnost pamćenja prošlih m znakova i budućih n znakova i na temelju toga stavlja simbol iz $\mathcal{U}$ na drugu traku koju tumačimo kao izlazni element.

Primjer 1.6.2. *Najjednostavniji su $(0, 0)$-blok kodovi. Kod njih i-ta koordinata izlaza ovisi isključivo o i-toj koordinata ulaza. Oni zapravo samo mijenjaju alfabet pri čemu mogu različita slova zamijeniti istim simbolom novog alfabeta.*

Primjer 1.6.3. *Neka je X prostor pomaka. Ako stavimo $\mathcal{U} = \mathcal{A}$ onda je preslikavanje pomaka σ $(0, 1)$-blok kôd uz $\Phi(a_0a_1) = a_1$.*

Uočimo da prikaz iz definicije (m, n)-blok koda nije jedinstven. Čak ni brojevi m, n nisu jedinstveni. Npr. identitetu na punom $\mathcal{A}$-pomaku možemo definirati kao $(0, 0)$-blok kôd uz $\Phi(a_0) = a_0$, ali i kao $(3, 2)$-blok kôd uz $\Phi(a_{-3}a_{-2}a_{-1}a_0a_1a_2) = a_0$.

Ta nejedinstvenost je prije prednost, nego mana jer imamo mogućnosti da svaki (m, n)-blok kôd shvatimo kao (M, N)-blok kôd gdje su $M \geq m$ i $N \geq n$ i gdje je novo preslikavanje $\hat{\Phi}$ dano s

$$\hat{\Phi}(a_{-M} \dots a_N) = \Phi(a_{-m} \dots a_n).$$

Taj postupak ćemo nazivati *povećavanje prozora od* Φ.

Primjer 1.6.4. *Neka je $\mathcal{A} = \mathcal{U} = \{0, 1\}$ i neka je X pomak zlatnog reza iz primjera 1.4.9, a Y parni pomak iz primjera 1.4.11. Definiramo Φ na 2-blokovima s $\Phi(00) = 1$, $\Phi(01) = 0$ i $\Phi(10) = 0$. Ne moramo definirati $\Phi(11)$ budući da se taj blok ne javlja u X. Tvrdim da je $(1, 0)$-blok kôd $\phi = \Phi^\infty \colon X \to Y$ surjekcija.*

Ako se 10^k1 javlja u $\phi(x)$ onda to mora biti slika bloka oblika $0(01)^r00$, pa slijedi da je $k = 2r$ paran. Time je pokazano da je $\phi(X) \subseteq Y$. Kako su u svakoj točki $y \in Y$ jedinice razdvojene parnim brojem nula onda je jasno da će se točka

$$\dots (01)^{r_{-1}}0 \quad (01)^{r_0}0 \quad (01)^{r_1}0 \dots$$

preslikati u točku

$$\dots 10^{2r_{-1}} \quad 10^{2r_0} \quad 10^{2r_1} \dots$$

pa imamo i surjektivnost.

Propozicija 1.6.5. *Neka su X i Y prostori pomaka i $\phi \colon X \to Y$ (m, n)-blok kôd među njima. Onda je $\phi \circ \sigma_X = \sigma_Y \circ \phi$ tj. sljedeći dijagram komutira.*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\sigma_X} & X \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ Y & \xrightarrow{\sigma_Y} & Y \end{array}$$

Napomena 1.6.6. *Kada imamo situaciju kao u gornjem dijagramu, reći ćemo da ϕ **preplíće** σ_X **i** σ_Y ili kraće da je ϕ **preplitanje**.*

Dokaz. Neka je Φ preslikavanje koje inducira ϕ. Za svaki $x \in X$ imamo

$$\begin{aligned}(\sigma_Y \circ \phi)(x)_{[i]} = \phi(x)_{[i+1]} &= \Phi(x_{[i+1-m, i+1+n]}) \\ &= \Phi(\sigma_X(x)_{[i-m, i+n]}) \\ &= \phi(\sigma_X(x))_{[i]}.\end{aligned}$$

□

Primjer 1.6.7. *Neka je X puni binarni pomak. Definiramo preslikavanje $\phi \colon X \to X$ tako da je*

$$\phi(x) = \begin{cases} 1^\infty & \text{ako se u } x \text{ javlja beskonačno mnogo jedinica,} \\ 0^\infty & \text{inače.} \end{cases}$$

Očigledno je da vrijedi $\phi \circ \sigma = \phi = \sigma \circ \phi$, no ϕ ipak nije (m, n)-blok kôd niti za jedan izbor $m, n \in \mathbb{N}$. Problem je u tome što je za izračunavanje neke koordinate od $\phi(x)$ potrebno *poznavati čitav x. Moguće je izabrati po volji veliki broj $k \in \mathbb{N}$ tako da se x i y podudaraju u $(2k+1)$-centralnom bloku, a da je ipak $\phi(x) \neq \phi(y)$. Zapravo, ključna je činjenica da ϕ nije neprekidna. Naime, ako uzmemo niz $(x^{(l)})_{l\in\mathbb{N}}$ definiran s $x^{(l)} = \ldots 00.1^l 0^\infty$ onda jasno da $x^{(l)}$ konvergira k $\ldots 00.1^\infty$, ali $\phi(x^{(l)}) = 0^\infty$ što* ne kovergira *k* $1^\infty = \phi(\ldots 00.1^\infty)$.

Propozicija 1.6.8. *Neka su X i Y prostori pomaka. Preslikavanje $\phi\colon X \to Y$ je (m,n)-blok kôd ako i samo ako je $\phi \circ \sigma_X = \sigma_Y \circ \phi$ i postoji $N \in \mathbb{N}_0$ takav da je $(\phi(x))_0$ funkcija od $x_{[-N,N]}$.*

Dokaz. Nužnost je očigledna iz definicije (m,n)-blok koda i propozicije 1.6.5. Za dovoljnost, definirajmo preslikavanje Φ na $\mathcal{B}_{2N+1}(X)$ s $\Phi(w) = (\phi(x))_0$ gdje je x bilo koja točka iz X za koju je $x_{[-N,N]} = w$. Sada se direktno provjerava da je $\phi = \Phi^\infty$ (N,N)-blok kôd. □

Prije iskaza sljedećeg teorema podsjetimo se činjenice da su na kompaktnim prostorima, a prostori pomaka jesu takvi, pojmovi *neprekinutosti* i *uniformne neprekinutosti* funkcije ekvivalentni.

Teorem 1.6.9. *Neka su X i Y prostori pomaka s pripadajućim funkcijama pomaka σ_X i σ_Y i neka je $\phi\colon X \to Y$ funkcija (ne nužno neprekidna). Tada je ϕ blok kôd ako i samo ako je ϕ neprekidno preplitanje.*

Dokaz. Pretpostavimo da je ϕ (N,N)-blok kôd (što možemo postići povećavanjem prozora). Već je u propoziciji 1.6.5 pokazano da je ϕ preplitanje. Da bi vidjeli neprekidnost uzmimo $\epsilon > 0$. Neka je $M \in \mathbb{N}$ takav da je $2^{-M} < \epsilon$. Stavimo $\delta = 2^{-(M+N)}$. Ako sada uzmemo $x, y \in X$ za koje je $d(x,y) < \delta$ onda to znači da se x i y podudaraju u centralnom $2(M+N)+1$-bloku. Ali to znači da se $\phi(x)$ i $\phi(y)$ moraju podudarati u centralnom $2M+1$-bloku pa je $d(\phi(x),\phi(y)) \leq 2^{-M} < \epsilon$.

Da bismo pokazali obratnu implikaciju, dovoljno je pokazati da za $x \in X$ nulta koodrinata od $\phi(x)$ ovisi samo o $(2N+1)$-centralnom bloku za neki dovoljno veliki $N \in \mathbb{N}$ koji ne ovisi o x. Tada će tvrdnja slijediti iz propozicije 1.6.8. Budući da je ϕ uniformno neprekidno onda za $\epsilon = 1$ postoji $\delta > 0$ takav da $d(x,y) < \delta$ povlači $d(\phi(x),\phi(y)) < 1 = 2^0$. To pak znači da se $\phi(x)$ i $\phi(y)$ podudaraju u nultoj koordinati. Ako sada izaberemo $N \in \mathbb{N}$ takav da je $2^{-N} < \delta$ onda ćemo imati da su svaka dva elementa koja se podudaraju u centralnom $(2N+1)$-bloku udaljena za manje od $2^{-N} < \delta$ pa im se, po prethodnoj diskusiji, slike podudaraju u nultoj koordinati. Drugim riječima, nulta koordinata slike elementa $x \in X$ ovisi samo o centralnom $(2N+1)$-bloku. □

Sada navodimo niz važnih posljedica ovog teorema.

Korolar 1.6.10. *Preslikavanje pomaka σ je (uniformno) neprekidno.*

Teorem 1.6.11. *Neka su X i Y prostori pomaka i ϕ blok kôd među njima. Slika tog preslikavanja* $\operatorname{Im}\phi$ *je prostor pomaka.*

Dokaz. Lako se vidi da preplitanje mora σ_X-invarijantne skupove preslikavati u σ_Y-invarijantne skupove. Tvrdnja sada slijedi iz činjenice da je ϕ neprekidno preslikavanje pa je slika kompaktnog skupa ponovno kompakt. □

Teorem 1.6.12. *Inverz bijektivnog blok koda je opet blok kôd.*

Dokaz. Komponiranjem s ϕ^{-1}, slijeva i zdesna, relacije

$$\phi \circ \sigma_X = \sigma_Y \circ \phi$$

dobivamo da je inverz (invertibilnog) preplitanja ponovno preplitanje. Neprekidnost inverza sada slijedi iz činjenice da je neprekidna bijekcija s kompakta u Hausdorffov prostor nužno homeomorfizam. □

Iskažimo sada karakterizaciju neprekidnosti preslikavanja na prostorima pomaka.

Teorem 1.6.13. *Preslikavanje $\phi\colon X \to Y$ na prostorima pomaka je neprekidno ako i samo ako za svaki $M \in \mathbb{N}$ postoji $N = N(M) \in \mathbb{N}$ tako da za sve $x, y \in X$ vrijedi implikacija*

$$x_{[-N,N]} = y_{[-N,N]} \quad \Rightarrow \quad \phi(x)_{[-M,M]} = \phi(y)_{[-M,M]}.$$

Dokaz. Koristimo činjenicu da je na kompaktima neprekidnost ekvivalentna uniformnoj neprekidnosti i definiciju metrike na prostorima pomaka. Argumentacija je zapravo dâna u dokazu teorema 1.6.9. □

Za kraj ovog poglavlja pogledajmo primjer neprekidnog preslikavanja na prostoru pomaka koje nije preplitanje što znači da nije ni blok kôd. Taj će rezultat, uz onaj iz primjera 1.6.7, pokazati nezavisnost pojmova neprekidnosti i preplitanja u prostorima pomaka.

Primjer 1.6.14. *Neka je X puni binarni pomak i neka je $\phi\colon X \to X$ funkcija definirana s*

$$\phi(\dots x_{-1}.x_0x_1x_2\dots) = \dots x_{-1}.1x_1x_2\dots$$

Tada je ϕ neprekidno preslkavanje koje nije preplitanje. Neprekidnost slijedi iz činjenice da se blokovi koji se podudaraju u centralnom $(2k+1)$-bloku preslikaju u blokove koji se također podudaraju u centralnom $(2k+1)$-bloku. S druge strane

$$\phi(\sigma(0^\infty)) = \dots 0.100\cdots \neq \dots 01.000\cdots = \sigma(\phi(0^\infty)),$$

pa ϕ nije preplitanje.

1.7 Pomak konačnog tipa

Sada ćemo pobliže opisati najjednostavnije prostore pomaka, one koji su zadani preko *konačnog* skupa zabranjenih blokova.

Definicija 1.7.1. *Za prostor pomaka X kažemo da je* ***konačnog tipa*** *ako postoji konačan skup riječi $\mathcal{F}$ nad alfabetom $\mathcal{A}$ tako da vrijedi $X = X_{\mathcal{F}}$.*

Primjer 1.7.2. *Puni pomak je pomak konačnog tipa budući da je $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}} = X_{\emptyset}$. I, kako smo već spomenuli, pomak zlatnog reza iz primjera 1.4.9 je pomak konačnog tipa.*

Uočimo da se pomak konačnog tipa možda može opisati i beskonačnim skupom zabranjenih riječi. Zapravo, to nećemo moći samo u slučaju punog pomaka. Naime, za svaki prostor pomaka možemo za skup zabranjenih blokova staviti komplement njegova jezika. Taj skup će za sve prostore pomaka, osim punog pomaka, biti beskonačan. Gornja definicija samo traži da postoji *neki* konačan skup zabranjenih blokova koji opisuje taj prostor pomaka.

Neka je $X \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ pomak konačnog tipa, i neka je $X = X_{\mathcal{F}}$ za konačan $\mathcal{F}$. Neka najdulji blok u $\mathcal{F}$ ima duljinu N. Sada formiramo skup $\mathcal{F}_N$ tako da u njega stavimo sve blokove duljine N nad alfabetom $\mathcal{A}$ koji sadrže kao podblok neki od blokova iz $\mathcal{F}$. Očigledno je sada $X = X_{\mathcal{F}} = X_{\mathcal{F}_N}$. Ponekad će nam biti korisno da su svi zabranjeni blokovi iste duljine pa ćemo podrazumijevati da je gornji postupak već proveden i da se u $\mathcal{F}$ nalaze blokovi iste duljine. Time smo postigli da se pitanje 'Da li je x u X?' svodi na provjeru svih podriječi duljine N. Ako je svaka takva podriječ iz jezika od X, onda je i x iz X.

Definicija 1.7.3. *Za pomak konačnog tipa reći ćemo da je* ***M-korak*** *ako ga možemo opisati preko familije zabranjenih blokova koji svi imaju duljinu $M + 1$.*

Kako smo gore vidjeli, svaki pomak konačnog tipa je M-korak za neki $M \in \mathbb{N}_0$. Također, ako je X M-korak, onda je on i K-korak za sve $K \geq M$.

Primjer 1.7.4. *Parni pomak X iz primjera 1.4.11 nije pomak konačnog tipa. Ukoliko bi bio, morala bi postojati kolekcija N-blokova $\mathcal{F}$ takva da je $X = X_{\mathcal{F}}$. Sada uzmimo točku*

$$x = 0^{\infty}.10^{2N+1}10^{\infty}.$$

Očigledno je svaka N-podriječ od x u jeziku $\mathcal{B}(X)$, no x ipak nije u parnom pomaku.

Sada dokazujemo teorem koji karakterizira pomake konačnog tipa preko svojstva lijepljenja blokova koji se „dovoljno dobro" preklapaju.

Teorem 1.7.5. *Prostor pomaka X je M-korak ako i samo ako za svaka dva bloka $uv, vw \in \mathcal{B}(X)$ koja se preklapaju u bloku duljine barem M (tj. $|v| \geq M$), mora biti i $uvw \in \mathcal{B}(X)$.*

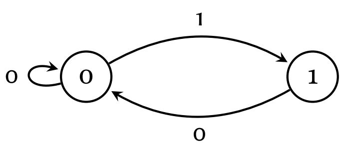
Dokaz. Prvo pretpostavimo da je X M-korak. Odnosno $X = X_{\mathcal{F}}$, gdje je $\mathcal{F}$ lista zabranjenih $(M+1)$-blokova. Neka su dani $uv, vw \in \mathcal{B}(X)$. Znači da postoje $x, y \in X$ td. $x_{[-k,n]} = uv$ i $y_{[1,l]} = vw$, pa je $x_{[1,n]} = y_{[1,n]} = v$. Tvrdim da je točka $z = x_{(-\infty,0]}vy_{[n+1,\infty)}$ u X. No to je jasno jer je svaka njena podriječ duljine M ujedno podriječ od x ili od y pa je posebno i u $\mathcal{B}(X)$. Dakle, $z \in X$ pa je $uvw = z_{[-k,l]} \in \mathcal{B}(X)$.

Obratno, pretpostavimo da je X prostor pomaka nad alfabetom $\mathcal{A}$ i neka postoji $M \in \mathbb{N}_0$ tako da $uv, vw \in \mathcal{B}(X)$ uz $|v| \geq M$ povlači $uvw \in \mathcal{B}(X)$. Označimo s $\mathcal{F}$ skup svih $(M+1)$-blokova nad $\mathcal{A}$ koji nisu u $\mathcal{B}_{M+1}(X)$. Pokažimo da je $X = X_{\mathcal{F}}$.

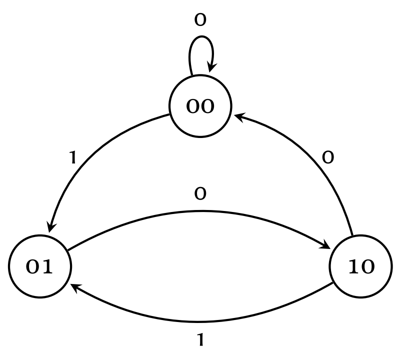
Ako je $x \in X$ onda se, po konstrukciji, niti jedan od blokova iz $\mathcal{F}$ ne javlja u x pa je $x \in X_{\mathcal{F}}$. Dakle, $X \subseteq X_{\mathcal{F}}$. Uzmimo sada $x \in X_{\mathcal{F}}$. Vrijedi da su $x_{[0,M]}$ i $x_{[1,M+1]}$ u $\mathcal{B}(X)$. Kako se ti blokovi podudaraju u M simbola imamo da je $x_{[0,M+1]} \in \mathcal{B}(X)$. Sada promatramo blokove $x_{[0,M+1]}$ i $x_{[2,M+2]}$ pa dobijemo da $x_{[0,M+2]} \in \mathcal{B}(X)$. Nastavljajući induktivno nadesno, i slično nalijevo, dobivamo da je svaki k-centralni blok od x u jeziku $\mathcal{B}(X)$. Sada po korolaru 1.5.3 dobivamo $x \in X$, čime je dokazano $X_{\mathcal{F}} \subseteq X$. $\square$

Sada ćemo opisati način na koji se pomak konačnog tipa može reprezentirati preko dvostrano beskonačnih šetnji na konačnom grafu. U nastavku izlaganja nećemo biti do kraja matematički precizni kako bi izbjegli kompliciranje notacije.

Podsjetimo se da *usmjerenim grafom* nazivamo uređen par (V, E) gdje je V skup *vrhova*, a E skup *bridova* tog grafa. Pri tome je za svaki brid određen njegov početni i krajnji vrh. Dopuštamo da između dvaju vrhova postoji i više od jednog brida. Ako je uz to dana funkcija $L\colon E \to \mathcal{A}$ gdje je $\mathcal{A}$ konačan alfabet, onda ćemo reći da je (V, E) **označeni usmjereni graf**. Na slici 1.1 su dva primjera takvog grafa. Iznad strelica pišu funkcijske vrijednosti od L na pripadajućem bridu.



(a) Kao 1-korak



(b) Kao 2-korak

Slika 1.1: Graf pomaka zlatnog reza

Neka je sada dân prostor pomaka X konačnog tipa. Neka je $M \geq 0$ cijeli broj takav da je X M-korak. Za skup vrhova grafa stavimo skup $\mathcal{B}_M(X)$. Za svake dvije riječi $u = a_1a_2 \dots a_M$ i $v = b_2b_3 \dots b_{M+1}$ iz $\mathcal{B}_M(X)$ stavimo brid od u do v ako je $a_i = b_i$ za $i = 2, 3 \dots M$ i ako je ispunjeno da je

$$a_1a_2a_3 \dots a_M b_{M+1} = a_1b_2b_3 \dots b_M b_{M+1} \in \mathcal{B}_{M+1}(X).$$

Na taj brid stavimo oznaku b_{M+1}. Pod pojmom *označene, dvostrano beskonačne šetnje na grafu* podrazumijevamo niz

$$\dots L(e_{-2})L(e_{-1}).L(e_0)L(e_1)L(e_2) \dots \tag{1.22}$$

gdje su $e_i \in E$ ulančani bridovi, ondosno vrijedi da je krajnji vrh od e_i ujedno i početni vrh od e_{i+1} za svaki $i \in \mathbb{Z}$. Skup svih takvih nizova je podskup od $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ i označimo ga s $X_{(V,E)}$. Tvrdimo da je to prostor pomaka. Čak štoviše, pokazat ćemo da je $X_{(V,E)} = X$.

Uočimo da je iz gornje konstrukcije jasno da se u promatranom grafu ne pojavljuju višestruki bridovi (osim u slučaju 0-koraka koji se može posebno razmatrati) pa svaki ulančani niz bridova $\dots e_{-1}.e_0e_1 \dots$ jednoznačno određuje niz vrhova $\dots v_{-1}.v_0v_1 \dots$, gdje je v_i početni vrh od e_i, a v_{i+1} završni. Pisat ćemo $e_i = [v_i, v_{i+1}]$. Vrijedi i obratno, šetnja po vrhovima određuje šetnju po bridovima.

Neka je, dakle, $x \in X$. Stavimo $v_i = x_{[i-M,i)}$. Očigledno je time definirana valjana šetnja na grafu i vrijedi

$$L(e_i) = L([v_i, v_{i+1}]) = L([x_{[i-M,i)}, x_{[i-M+1,i+1)}]) = x_i.$$

Obratno, neka je dana označena šetnja na grafu $y = (L(e_i))_{i\in\mathbb{Z}}$. Da bi provjerili da je ona iz M-koraka X dovoljno je provjeriti da je svaka podriječ od y duljine $M + 1$ iz $\mathcal{B}(X)$. Neka je $(v_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ niz vrhova pridružen toj šetnji. Iz konstrukcije je jasno da mora biti

$$y_{[i,i+M)} = L(e_i)L(e_{i+1}) \dots L(e_{i+M-1}) = v_{i+M} \in \mathcal{B}_M(X), \text{ za sve } i \in \mathbb{Z}.$$

Također zbog povezanosti vrha v_{i+M} s vrhom v_{i+M+1} imamo da je $y_{[i,i+M]} \in \mathcal{B}_{M+1}(X)$, za sve $i \in \mathbb{Z}$. Dakle, $y \in X$.

Primjer 1.7.6. *Nije teško provjeriti da graf sa slike 1.1a upravo definira prostor pomaka zlatnog reza iz primjera 1.4.9.*

Naravno, ako je X M-korak, onda je on M'-korak i za $M' > M$ pa imamo da i graf sa slike 1.1b definira isti pomak zlatnog reza.

Ovdje ćemo stati s proučavanjem prostora pomaka. U idućem poglavlju uvesti ćemo osnovne pojmove iz teorije dinamičkih sustava te vidjeti što možemo reći o dinamici na prostorima pomaka. Nakon toga ćemo se ponovno vratiti konstrukcijama novih prostora pomaka iz označenih grafova, s ciljem definiranja prostora *sofičkog pomaka.*

Poglavlje 2

Dinamika na prostoru pomaka

2.1 Osnovni pojmovi teorije dinamičkih sustava

Definicija 2.1.1. *Uređen par (X, f), gdje je X topološki prostor i $f: X \to X$ neprekidno preslikavanje na njemu, nazivamo* ***dinamičkim sustavom****. Ukoliko je f homeomorfizam (X, f) zovemo* ***invertibilnim dinamičkim sustavom****. Da bismo naglasili dinamiku često ćemo umjesto para (X, f) pisati jednostavno f.*

Ukoliko drugačije ne naglasimo, svi topološki prostori koje promatramo, bit će kompaktni, metrički prostori. Oni posebno zadovoljavaju drugi (pa i prvi) aksiom prebrojivosti. Neformalno to znači da su osnovni topološki pojmovi, poput neprekidnosti, karakterizirani preko nizova. To će nam biti potrebno u dokazu propozicije 2.2.2.

Primjer 2.1.2. *Važan primjer dinamičkog sustava je prostor pomaka X uz funkciju pomaka na njemu σ_X. No, možemo promatrati i dinamički sustav (X, ϕ) gdje je ϕ bilo koji blok kôd na X.*

Pojam invarijantnosti već smo spomenuli u kontekstu preslikavanja pomaka.

Definicija 2.1.3. *Neka je (X, f) dinamički sustav. Za podskup S skupa X kažemo da je* ***invarijantan*** *ako je $f(S) = S$.*

Napomena 2.1.4. *Neki autori gornje svojstvo nazivaju jakom invarijantošću dok za skup S kažu da je invarijantan ukoliko je $f(S) \subseteq S$. Mi ćemo to svojstvo nazivati* ***slabom invarijantnošću****.*

Oznaka f^n bit će nam (kao i u slučaju pomaka) rezervirana za n-struku kompoziciju funkcije f sa sobom.

Definicija 2.1.5. *Točka $x \in X$ je* ***periodička točka perioda*** *n* ***za preslikavanje*** *f ako je $f^n(x) = x$ za neki $n \geq 1$. Za najmanji $n \in \mathbb{N}$ za koji je to ispunjeno, kažemo da je to* ***temeljni (ili osnovni) period od*** *x. Točke temeljnog perioda 1 zovemo i* ***fiksnim točkama****.*

Lema 2.1.6. *Neka je x periodična točka perioda n za funkciju f. Tada osnovni period od x dijeli n.*

Dokaz. Označimo sa d temeljni period od x i pretpostavimo da d ne dijeli n. Euklidov algoritam dijeljenja daje nenegativne cijele brojeve q, r takve da je $n = qd + r$ i da je $0 < r < n$. Sada imamo

$$x = f^n(x) = f^{qd+r}(x) = f^r(f^{qd}(x)) = f^r(x)$$

pa je x točka perioda $r < d$. Kontradikcija. $\square$

Definicija 2.1.7. ***Prednja orbita*** *točke $x \in X$ je skup $\{f^n(x) : n \in \mathbb{N}_0\}$. Ukoliko je sustav invertibilan možemo definirati i* ***stražnju orbitu*** *točke x kao skup $\{f^{-n}(x) : n \in \mathbb{N}_0\}$. Uniju prednje i stražnje orbite nazivamo* ***orbitom točke*** *x.*

Podsjetimo se da podskup topološkog prostora zovemo gustim ukoliko mu je zatvarač jednak čitavom prostoru.

Primjer 2.1.8. *Za $\alpha \in \mathbb{R}$ promotrimo dinamički sustav $(\mathbb{T}, \phi_\alpha)$ gdje je $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 1-sfera i $\phi_\alpha(x + \mathbb{Z}) = (x + \alpha) + \mathbb{Z}$. Zapravo je ϕ_α rotacija na kružnici za kut $2\pi\alpha$. Lako se provjeravaju sljedeće činjenice. Preslikavanje ϕ_α ima fiksnu točku ako i samo ako je $\alpha \in \mathbb{Z}$. Periodičnu točku ima ako i samo ako je $\alpha \in \mathbb{Q}$. Tada je svaka točka periodična s istim temeljnim periodom koji je jednak nazivniku od α kada ga zapišemo u reduciranom obliku. Ukoliko je $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ onda svaka točka ima gustu orbitu.*

Definicija 2.1.9. *Za funkciju $\phi\colon (X, f) \to (Y, g)$ među dinamičkim sustavima kažemo da je* ***homomorfizam*** *ili* ***semi-konjugacija*** *ako je to neprekidno preslikavanje prostora X u Y i ako je ono* ***preplitanje*** *f i g odnosno sljedeći dijagram komutira.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & X \arrow[d, "\phi"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

Surjektivni homomorfizam zovemo ***faktorskim preslikavanjem*** *i kažemo da je Y* ***faktor*** *od X. Injektivni homomorfizam zovemo* ***smještenjem****.* ***Topološkom konjugacijom*** *nazivamo bijektivni homomorfizam čiji je inverz također homomorfizam. U tom slučaju kažemo da su ta dva dinamička sustava* ***topološki konjugirana*** *i pišemo $(X, f) \cong (Y, g)$.*

Napomena 2.1.10. *Uočimo da sada teorem 1.6.9 zapravo kaže da su homomorfizmi prostora pomaka upravo blok kodovi. Također uočimo da je zahtjev homomorfnosti inverza u definiciji topološke konjugacije suvišan kada promatramo dinamičke sustave na kompaktnim metričkim prostorima. To pokazujemo na jednak način kao u teoremu 1.6.12.*

Propozicija 2.1.11. *Neka je $\phi\colon X \to Y$ homomorfizam dinamičkih sustava (X, f) i (Y, g). Ako je $x \in X$ periodična točka perioda n, onda je i $\phi(x) \in Y$ periodična točka perioda n. Štoviše, temeljni period od $\phi(x)$ dijeli temeljni period od x. Smještenja, pa time i konjugacije, čuvaju temeljni period točke.*

Dokaz. Ako je x perioda n onda imamo $g^n(\phi(x)) = \phi(f^n(x)) = \phi(x)$ pa je $\phi(x)$ također perioda n. Ukoliko je n temeljni period od x, onda je to period i od $\phi(x)$ pa onda po lemi 2.1.6 osnovi period od $\phi(x)$ dijeli n.

Ako je ϕ injektivno onda je $g^k(\phi(x)) = \phi(x)$ točno onda kada je $f^n(x) = x$ pa x i $\phi(x)$ moraju imati isti osnovni period. $\square$

Gornja propozicija pokazuje da je broj točaka perioda n jednak u topološki konjugiranim prostorima. To je u skladu s intuicijom da su konjugirani prostori „isti" u smislu dinamike.

2.2 ω-granični skupovi u prostoru pomaka

Definicija 2.2.1. *Za točku $x \in X$ definiramo* ***ω-granični skup točke x****, u oznaci $\omega_f(x)$, kao skup gomilišta prednje orbite točke x, formulom*

$$\omega_f(x) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{f^j(x) : j \geq n\}}. \tag{2.1}$$

Iz definicije je jasno da je ω-granični skup točke $x \in X$ zatvoren skup. Taj skup je i slabo invarijantan jer

$$f(\omega_f(x)) \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(\overline{\{f^j(x) : j \geq n\}}) \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{f(\{f^j(x) : j \geq n\})} = \omega_f(x), \tag{2.2}$$

gdje smo kod druge inkluzije iskoristili neprekidnost funkcije f. No, vrijedi i više.

Propozicija 2.2.2. *Neka je (X, f) dinamički sustav, gdje je X kompaktan, metrički prostor. Za svaki $x \in X$ je skup $\omega_f(x)$ zatvoren i invarijantan.*

Dokaz. Preostaje pokazati da je $\omega_f(x) \subseteq f(\omega_f(x))$. Uzmimo y iz $\omega_f(x)$. Prvi aksiom prebrojivosti omogućuje da izaberemo podniz $(f^{p_n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ orbite od x koji konvergira k y. Promotrimo sada niz $(f^{p_n-1}(x))_{n\in\mathbb{N}}$. Zbog kompaktnosti prostora X on ima konvergentan podniz s limesom $y' \in X$. To znači da početni podniz $(f^{p_n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ima podniz koji konvergira k $f(y') \in X$, a zbog jedinstvenosti limesa slijedi da je $y = f(y')$. Kako je y' očigledno iz $\omega_f(x)$, tvrdnja je dokazana. □

Definicija 2.2.3. *Neka je (X, f) dinamički sustav i d metrika na X. Za neprazan, invarijantan i zatvoren skup $\Lambda \subseteq X$ kažemo da je* ***unutarnje lančasto trazitivan*** *ukoliko za svaki par točaka x i y iz Λ, i svaki $\epsilon > 0$ postoji konačan niz točaka u Λ*

$$x = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = y \tag{2.3}$$

i niz prirodnih brojeva $t_1, t_2, \dots, t_n \geq 1$ takvih da je

$$d(f^{t_i}(x_{i-1}), x_i) < \epsilon. \tag{2.4}$$

Ponekad se niz točaka iz gornje definicije naziva ϵ-lancem ili ϵ-pseudoorbitom. Gornja definicija zahtijeva da za svake dvije točke x, y postoji ϵ-lanac od x do y, ali i od y do x. Ukoliko Λ ispunjava slabiji zahtjev, da postoji ϵ-lanac između svake dvije točke x i y u bilo kojem poretku, reći ćemo da je Λ **nerastavljiv**. Sljedeća lema dokazana je u [HSZ01].

Lema 2.2.4. *Neka je (X, f) dinamički sustav (X je kompaktan, metrički prostor). Za svaki $x \in X$, skup $\omega_f(x)$ je unutarnje lančasto tranzitivan.*

Dokaz. Neka je $x \in X$ i stavimo $x_n = f^n(x)$. Iz propozicije 2.2.2 slijedi da je $\omega_f(x)$ zatvoren i invarijantan.

Fiksirajmo $\epsilon > 0$. Zbog kompaktnosti prostora X možemo izabrati $0 < \delta < \frac{\epsilon}{3}$ tako da za sve $u, v \in X$ nejednakost $d(u, v) < \delta$ povlači $d(f(u), f(v)) < \frac{\epsilon}{3}$. Označimo δ-okolinu od $\omega_f(x)$ s U. Ponovno zbog kompaktnosti prostora X moguće je izabrati prirodan broj N takav da su svi x_n iz U za $n \geq N$.

Neka su a, b po volji izabrane točke iz $\omega_f(x)$. Postoje prirodni brojevi $k > m \geq N$ takvi da je ispunjeno $d(x_m, f(a)) < \frac{\epsilon}{3}$ i $d(x_k, b) < \frac{\epsilon}{3}$. Niz

$$y_0 = a,\ y_1 = x_m,\ y_2 = x_{m+1},\ \dots,\ y_{k-m} = x_{k-1},\ y_{k-m+1} = b \tag{2.5}$$

je $\frac{\epsilon}{3}$-lanac unutar X od a do b.

Kako su svi y_i unutar U, možemo izabrati niz točaka $z_1, z_2, \dots, z_{k-m}$ unutar $\omega_f(x)$ tako da je $d(y_i, z_i) < \delta$. Stavimo $z_0 = a$ i $z_{k-m+1} = b$ pa za $i = 0, \dots, k-m$ imamo

$$d(f(z_i), z_{i+1}) \leq d(f(z_i), f(y_i)) + d(f(y_i), y_{i+1}) + d(y_{i+1}, z_{i+1}) < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3}. \tag{2.6}$$

Dakle, niz $z_0, z_1, \dots z_{k-m+1}$ je ϵ-lanac unutar $\omega_f(x)$ od a do b. □

Sljedeći teorem daje opis ω-graničnih skupova u prostoru pomaka.

Teorem 2.2.5. *Neka je (X, σ) pomak i neka $x \in X$. Tada je $\omega_\sigma(x)$ skup svih točaka y iz X takvih da se svaki centralni segment od y pojavljuje beskonačno puta u desnom repu od x.*

Dokaz. Uzmimo $y \in \omega_\sigma(x)$. To znači da postoji podniz $(\sigma^{p_n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ koji konvergira k y. Kako smo već prije naglasili, konvergencija u prostoru pomaka znači da za svaki centralni segment u y možemo izabrati dovoljno veliki $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za $n \geq n_0$ svi $\sigma^{p_n}(x)$ imaju iste elemente na tom centralnom segmentu kao i y. No to upravo znači da se svaki centralni segment u y mora pojavit kao podriječ beskonačno puta u desnom repu od x.

Obratno, ako je $y \in X$ takav da se svaki centralni segment od y pojavljuje beskonačno puta kao podriječ u desnom repu od x, onda to znači da postoji rastući niz prirodnih brojeva $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takav da se $\sigma^{p_n}(x)$ i y podudaraju u centralnom n-bloku. No to znači da $\sigma^{p_n}(x) \to y$ pa je $y \in \omega_\sigma(x)$. □

Korolar 2.2.6. *Neka je (X, σ) prostor pomaka nad konačnim alfabetom $\mathcal{A}$. Neka je $x \in X$. Označimo s $\mathcal{L}$ skup svih konačnih riječi koje se javljaju beskonačno puta u desnom repu od x. Tada je $\mathcal{L}$ jezik. Štoviše, $X_{\mathcal{L}^c} = \omega_\sigma(x)$.*

Dokaz. Očigledno je $\mathcal{L}$ zatvoren na operaciju uzimanja podblokova. Također ako imamo $w \in \mathcal{L}$ tada postoje $a, b \in \mathcal{A}$ takvi da je $awb \in \mathcal{L}$ jer bi se inače w pojavljivao samo konačno mnogo puta u desnom repu od x. Sada po propoziciji 1.5.2 slijedi da je $\mathcal{L}$ jezik.

Druga tvrdnja lako slijedi iz teorema 2.2.5. Naime, svaki centralni segment od $y \in X_{\mathcal{L}^c}$ je riječ jezika $\mathcal{B}(X_{\mathcal{L}^c}) = \mathcal{L}$ pa se pojavljuje beskonačno puta u desnom repu od x.

Obratno, ako se svaki centralni segment y pojavljuje beskonačno puta u desnom repu od x, po definiciji skupa $\mathcal{L}$, svaki centralni segment od y je unutar $\mathcal{L}$. Sada je po korolaru 1.5.3 $y \in X_{\mathcal{L}^c}$. □

Napomena 2.2.7. *Na potpuno analogan način bi se vidjelo da prethodni korolar vrijedi i u slučaju kada bi promatrali skup riječi koje se pojavljuju beskonačno puta u lijevom repu od x, odnosno onih koje se pojavljuju beskonačno puta u x (bilo u lijevom, bilo u desnom repu). U prvom slučaju bi odgovarajući prostor pomaka $X_{\mathcal{L}^c}$ bio α-granični skup (gomilište stražnje orbite od x), dok bi u drugom slučaju bio unija α-graničnog i ω-graničnog skupa (gomilište pune orbite od x).*

Sada dokazujemo centralni teorem koji karakterizira ω-granične skupove u pomaku konačnog tipa, upravo kao potpomake koji su unutarnje lančasto tranzitivni.

Lema 2.2.8. *Neka je Λ unutarnje lančasto tranzitivan potpomak pomaka konačnog tipa X i neka je dân par blokova $u, v \in \mathcal{B}(\Lambda)$. Stavimo da je m veći od brojeva $|u|$ i $|v|$. Tada postoji blok $w \in \mathcal{B}(X)$ kojem je u početni, a v krajnji podblok, tj.*

$$w_{[0,|u|)} = u \qquad i \qquad w_{[|w|-|v|,|w|)} = v,$$

i takav da je svaka podriječ od w veličine manje od m nužno iz jezika od Λ.

Dokaz. Neka je $M \geq 0$ cijeli broj za koji je X M-korak. Stavimo $m' = \max\{m, M\}$. Jer su u, v iz $\mathcal{B}(\Lambda)$, postoje $x, y \in \Lambda$ takvi da je $x_{[0,|u|)} = u$ i $y_{[0,|v|)} = v$. Iz definicije metrike na prostorima pomaka jasno je da možemo izabrati $\epsilon > 0$ tako da za $z, z' \in X$ nejednakost $d(z, z') < \epsilon$ povlači da je $z_{[0,m')} = z'_{[0,m')}$. Uzmimo sada ϵ-lanac od x do y unutar Λ

$$x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y$$

tako da vrijedi

$$d(\sigma^{t_i}(x_{i-1}), x_i) < \epsilon, \quad \text{gdje su } t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbb{N}.$$

Zbog izbora ϵ imamo da se $\sigma^{t_i}(x_{i-1})$ i x_i podudaraju na koordinatama od 0 do $m' - 1$, za $i = 1, 2, \ldots, n$. Za svaki takav i označimo s ϕ_i segment $(\sigma^{t_i}(x_{i-1}))_{[-t_i, m')}$. Očigledno su svi ϕ_i iz $\mathcal{B}(\Lambda) \subseteq \mathcal{B}(X)$ i svaka dva susjedna se preklapaju u bloku duljine $m' \geq M$ pa se po teoremu 1.7.5 riječ w', dobivena uzastopnom konkatenacijom $\phi_1, \ldots, \phi_n$ uz brisanje po jedne kopije ponovljenog bloka duljine m', nalazi u $\mathcal{B}(X)$.

Tako dobivena riječ počinje s u, ali neće završavati s v ukoliko je $m' > |v|$. U tom slučaju naprosto skratimo riječ w' do riječi w brišući posljednjih $m' - |v|$ znakova viška. Ako je sada q podriječ od w duljine manje od $m \leq m'$ onda je iz konstrukcije vidljivo da q mora biti podriječ nekog ϕ_i jer se svaka dva susjedna preklapaju u bloku duljine m'. No svaki ϕ_i je unutar $\mathcal{B}(\Lambda)$ pa je jasno i q iz $\mathcal{B}(\Lambda)$. □

Teorem 2.2.9. *Neka je Λ potpomak pomaka konačnog tipa X. Tada je Λ unutranje lančasto tranzitivan ako i samo ako postoji element $x \in X$ takav da je $\Lambda = \omega_\sigma(x)$.*

Dokaz. X je pomak konačnog tipa, pa postoji cijeli broj $M \geq 0$ takav da je X M-korak. Neka je dân unutarnje lančasto trazitivan potpomak $\Lambda \subseteq X$. Stavimo

$$\mathcal{L} = \bigcup_{k \geq M} \mathcal{B}_k(\Lambda).$$

Enumerirajmo skup $\mathcal{L} = \{\theta_k^* : k \in \mathbb{N}\}$ tako da je niz veličina blokova $|\theta_k^*|$ monotono rastući. Stavimo $\theta_k = \theta_{|k|}^*$ za $k \in \mathbb{Z}$. Za svaki $k \in \mathbb{Z}$ po lemi 2.2.8 možemo konsturirati blok Θ_k koji je iz $\mathcal{B}(X)$ takav da je

$$\Theta_k = \theta_k w_k' = w_k \theta_{k+1}, \tag{2.7}$$

i svaka podriječ od Θ_k veličine manje od $\max\{|\theta_k|, |\theta_{k+1}|\}$ nužno je iz $\mathcal{B}(\Lambda)$. Stavimo

$$x = \ldots w_{-2} w_{-1}.w_0 w_1 w_2 \ldots, \tag{2.8}$$

odnosno napravimo konkatenaciju svih Θ_k redom, uz brisanje jedne kopije od dva susjedna θ_k. Tvrdim da taj x zadovoljava tvrdnju teorema. Prvo uočimo da je x iz X. Naime, svi Θ_k su iz $\mathcal{B}(X)$ i svaka dva susjedna se preklapaju u θ_k, odnosno u barem M simbola pa uzastopnom primjenom teorema 1.7.5 dobivamo da je svaka konačna podriječ od x u $\mathcal{B}(X)$. Sada korolar 1.5.3 daje $x \in X$.

Još treba provjeriti da je $\Lambda = \omega_\sigma(x)$. Zbog korolara 2.2.6 dovoljno je vidjeti da je skup svih blokova koji se javljaju beskonačno puta u desnom repu od x točno jezik od Λ. Stoga neka je u blok iz $\mathcal{B}(\Lambda)$. On se očigledno pojavljuje kao podblok u po volji dugačkim riječima jezika $\mathcal{B}(\Lambda)$. Stoga se javlja kao podriječ u beskonačno elementata iz $\{\theta_k^* : k \in \mathbb{N}\}$ pa se zato javlja i beskonačno puta u desnom (a i u lijevom) repu od x.

Obratno, neka je u riječ koja se javlja beskonačno puta u desnom repu od x. Duljina od u je konačna, a kako $|\theta_k^*| \to \infty$ za $k \to \infty$, onda postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da je $|\theta_k| > |u|$ za $k > N$. Kako se riječi Θ_{k-1} i Θ_k unutar elementa x preklapaju upravo na riječi θ_k koje su dulje od u za $k > N$ i kako se u javlja beskonačno puta u desnom repu od x, onda se u mora javiti kao podriječ od nekog Θ_K za dovoljno veliki $K \in \mathbb{N}$, $K > N$. Jasno tada je $|\theta_K| > |u|$ pa je i $\max\{|\theta_K|, |\theta_{K+1}|\} > |u|$ a onda je po konstrukciji $u \in \mathcal{B}(\Lambda)$.

Time je pokazano da je svaki unutranje lančasto tranzitivan podskup pomaka konačnog tipa ω-granični skup neke točke tog pomaka. Obratna implikacija direktna je posljedica leme 2.2.4. □

Budući da je puni pomak nad konačnim alfabetom $\mathcal{A}$ također pomak konačnog tipa, odmah dobivamo važni

Korolar 2.2.10. *Neka je X prostor pomaka. Tada postoji element punog pomaka $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ takav da je $X = \omega_\sigma(x)$ ako i samo ako je X unutarnje lančasto tranzitivan.*

Napomena 2.2.11. *Napomenimo da rezultati analogni onima u teoremu 2.2.9 i korolaru 2.2.10 vrijede i u slučaju jednostrano beskonačnih nizova. Uz manje modifikacije, isti dokazi prolaze i u tom slučaju.*

2.3 Sofički pomak

Vratimo se ponovno na temu usmjerenih označenih grafova. U poglavlju 1.7 smo pokazali kako se svaki prostor pomaka konačnog tipa može reprezentirati kao skup označenih, dvostrano beskonačnih šetnji na nekom grafu. To nam je motivacija za sljedeću definiciju.

Definicija 2.3.1. *Neka je dan označen, usmjeren graf $\mathcal{G} = (V, E, L)$, gdje je L funkcija sa skupa bridova u neki konačan alfabet $\mathcal{A}$. Označimo s $X_{\mathcal{G}}$ skup svih označenih šetnji grafa*

$$X_{\mathcal{G}} = \{(L(e_i))_{i\in\mathbb{Z}} : (e_i)_{i\in\mathbb{Z}} \text{ je šetnja}\}, \tag{2.9}$$

pri čemu, kao i prije, šetnja označava ulančan, dvostrano beskonačan niz bridova.

*Za podskup $X \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ punog $\mathcal{A}$-pomaka reći ćemo da je **sofički pomak** ukoliko postoji neki graf $\mathcal{G}$ takav da je $X = X_{\mathcal{G}}$. Još kažemo da je $\mathcal{G}$ **prezentacija** od X.*

Napomena 2.3.2. *Ova definicija u skladu je s onom iz poglavlja 1.7, samo što je tamo bila korištena za slučaj specijalno konstruiranih grafova. Sada odmah slijedi da je svaki pomak konačnog tipa ujedno i sofički pomak.*

Podsjetimo još jednom da već spomenuti primjer pomaka zlatnog reza pokazuje da prezentacija sofičkog pomaka nije jedinstvena.

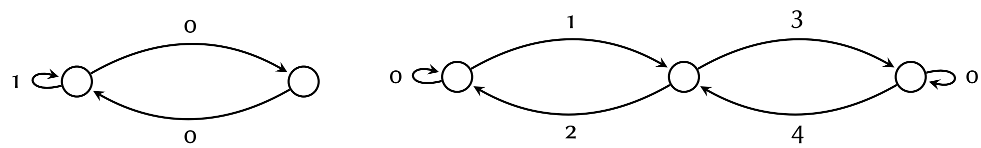
Uočimo da u definiciji *ne zahtijevamo* da je sofički pomak, prostor pomaka. Ipak, pokazat ćemo da će to biti slučaj. Invarijantanost na σ je trivijalna, ali nije očigledno da će za svaki graf $\mathcal{G}$ skup $X_\mathcal{G}$ biti zatvoren (odnosno kompaktan).

Teorem 2.3.3. *Sofički pomak je prostor pomaka.*

Dokaz. Neka je X sofički pomak i $\mathcal{G} = (V, E, L)$ neka njegova prezentacija s oznakama iz alfabeta $\mathcal{A}$. Stavimo sada $\mathcal{G}' = (V, E, \mathrm{id}_E)$ gdje je id_E identiteta na skupu bridova. Alfabet u grafu $\mathcal{G}'$ je E, tj. svaki brid ima svoju jedinstvenu oznaku. Nije teško provjeriti da je $X_{\mathcal{G}'}$ pomak konačnog tipa, čak i više, to je 1-korak. Naime, za skup zabranjenih riječi možemo uzeti sve riječi oblika ef gdje su $e, f \in E$ takvi da su kraj od e i početak od f različiti vrhovi.

Preslikavanje $L\colon E \to \mathcal{A}$ inducira $(0,0)$-blok kod $L^\infty\colon X_{\mathcal{G}'} \to X_\mathcal{G}$. To preslikavanje je očigledno surjektivno, odnosno faktorsko, pa je po teoremu 1.6.11 $X_\mathcal{G} = X$ prostor pomaka. $\square$

Vidjeli smo da je svaki pomak konačnog tipa, sofički pomak. Obrat ne vrijedi. Pogledajmo primjer sofičkog pomaka koji nije pomak konačnog tipa.



(a) Parni pomak

(b)

Slika 2.1: Prezentacije dvaju strogo sofičkih pomaka

Primjer 2.3.4. *Na slici 2.1a dan je graf koji prezentira parni pomak iz primjera 1.4.11 za koji smo pokazali da nije pomak konačnog tipa. Na sličan način pokazalo bi se i da ni sofički pomak prezentiran grafom na slici 2.1b nije konačnog tipa. Naime, ukoliko bi bio, onda bi bio M-korak za neki $M \in \mathbb{N}$. Istovremeno, u njemu moraju biti dopustivi blokovi oblika* 30^M *i* 0^M1 *pa bi i blok* 30^M1 *bio dopustiv, što nije.*

Za takve sofičke pomake koji nisu konačnog tipa, reći ćemo da su strogo sofički.

Nije teško argumentima teorije skupova pokazati da (nad fiksnim alfabetom s barem 2 simbola) sofičkih pomaka ima najviše prebrojivo mnogo. Također se lako pokaže da svih potpomaka ima neprebrojivo mnogo (zapravo već S-razmaka iz primjera 1.4.10 ima neprebrojivo za različite izbore skupa S) pa to osigurava da postoji prostor pomaka koji nije sofički. U idućem primjeru dajemo jedan konkretan takav prostor.

Primjer 2.3.5. *Stavimo $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$ i neka je X prostor pomaka sa skupom zabranjenih riječi $\{ab^m c^n a : m, n \geq 0, m \neq n\}$. Pretpostavimo da je to sofički pomak prezentiran nekim grafom $\mathcal{G}$. Neka je r broj vrhova tog grafa. Kako je riječ $ab^{r+1}c^{r+1}a$ dopustiva, onda postoji neka šetnja koja realizira tu riječ. Posebno konačna podšetnja koja realizira b^{r+1} mora dvaput posjetiti isti vrh, pa tako dobijemo ciklus duljine $k \geq 1$. Stoga možemo na mjesto tog ciklusa ubaciti još jedan takav ciklus, duplicirati ga, a da i dalje imamo valjanu šetnju po našem grafu. No to je kontradikcija jer bi takva šetnja imala podriječ $ab^{r+1+k}c^{r+1}a$ koja je nedopustiva.*

U dokazu teorema 2.3.3 smo vidjeli da se svaki sofički pomak može dobiti kao faktor nekog pomaka konačnog tipa. Zapravo, vrijedi i obratno. Sofički pomaci su karakterizirani tim svojstvom.

Teorem 2.3.6. *Pomak je sofički ako i samo ako je faktor pomaka konačnog tipa.*

Dokaz. Dovoljno je pokazati da je faktor pomaka konačnog tipa, sofički pomak. Zato, uzmimo da je Y pomak konačnog tipa i neka je $\phi \colon Y \to X$ faktorsko preslikavanje. Ono zbog teorema 1.6.9 mora biti (m, n)-blok kod za neke $m, n \in \mathbb{N}_0$. Neka je Φ blok preslikavanje na $\mathcal{B}_{m+n+1}(Y)$ koje inducira ϕ. Povećavanjem m ako treba možemo pretpostaviti da je Y $(m + n)$-korak.

Neka je sada $\mathcal{G}$ graf dobiven od Y kao $(m + n)$-koraka. Dakle, vrhovi su riječi iz $\mathcal{B}_{m+n}(Y)$, a brid postoji između dva vrha $a_1a_2 \ldots a_{m+n}$ i $b_2b_3 \ldots b_{m+n+1}$ ako imamo preklapanje na isto indeksiranim koordinatama i vrijedi da je $a_1b_2 \ldots b_{m+n+1}$ riječ od Y. Taj brid smo označavali s b_{m+n+1}, a sad ga označimo s $\Phi(a_1b_2 \ldots b_{m+n+1})$. Sada se direktno provjeri da je ovako dobiveni graf jedna prezentacija od X. □

Korolar 2.3.7. *Faktor sofičkog pomaka je sofički pomak.*

Napomena 2.3.8. *Ovaj korolar pokazuje da su sofički pomaci najmanja familija prostora pomaka koja sadrži pomake konačnog tipa i ujedno sadrži sve svoje faktore.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\phi \colon Y \to X$ faktorsko preslikavanje i da je Y sofički pomak. Po gornjem teoremu postoji pomak konačnog tipa Z i faktorsko preslikavanje $\psi \colon Z \to Y$. Kompozicija faktorskih preslikavanja je opet faktorsko preslikavanje pa imamo da je X faktor pomaka konačnog tipa, odnosno da je sofički pomak. □

Korolar 2.3.9. *Prostor pomaka koji je konjugiran sofičkom pomaku je i sam sofički.*

Dokaz. Budući da je konjugacija faktorsko preslikavanje, tvrdnja slijedi iz korolara 2.3.7. □

Korisno je imati i jednu drugu karakterizaciju sofičkog pomaka. No prije nego ćemo je moći iskazati trebat će uvesti još neke definicije.

Definicija 2.3.10. *Neka je X prostor pomaka i w riječ iz $\mathcal{B}(X)$.* ***Skup sljedbenika*** *od w definiramo kao*

$$F_X(w) = \{v \in \mathcal{B}(X) : wv \in \mathcal{B}(X)\}. \tag{2.10}$$

Kolekciju svih skupova sljedbenika prostora X označavamo s

$$\mathcal{C}_X = \{F_X(w) : w \in \mathcal{B}(X)\}. \tag{2.11}$$

Svaki skup sljedbenika jest beskonačan skup riječi, budući da se svaka riječ iz $\mathcal{B}(X)$ može proširiti po volji nadesno. Ipak, mnoge riječi mogu imati iste skupove sljedbenika. Pokazuje se da su sofički pomaci karakterizirani konačnošću skupa $\mathcal{C}_X$.

Teorem 2.3.11. *Prostor pomaka je sofički ako i samo ako ima konačan broj skupova sljedbenika.*

Dokaz. Pretpostavimo da je X prostor pomaka nad alfabetom $\mathcal{A}$ koji ima konačan skup $\mathcal{C}_X$. Kostruiramo označeni graf $\mathcal{G}$ na sljedeći način. Za skup vrhova stavimo skup $\mathcal{C}_X$. Za sve $C = F_X(w) \in \mathcal{C}_X$ i $a \in \mathcal{A}$ postupamo na sljedeći način. Ukoliko je $wa \in \mathcal{B}(X)$ stavimo brid označen s a od C do $F_X(wa)$, inače ne dodajemo brid. Postavlja se pitanje dobre definiranosti. Ako imamo $w, w' \in \mathcal{B}(X)$ takve da $F_X(w) = F_X(w')$ onda očigledno za svaki $a \in \mathcal{A}$ mora biti $wa \in \mathcal{B}(X)$ onda i samo onda kada je $w'a \in \mathcal{B}(X)$ jer w i w' imaju iste skupove sljedbenika. No, mora li biti $F_X(wa) = F_X(w'a)$? Mora, jer se oba skupa dobiju tako da uzmemo riječi iz C koje počinju s a, a zatim izbrišemo to prvo slovo.

Tvrdim da je tako dobiveni graf prezentacija od X pa će time biti pokazana dovoljnost iz izrijeka teorema. Budući da su X i $X_{\mathcal{G}}$ prostori pomaka, dovoljno je vidjeti da imaju isti jezik. Neka je $u = a_1 \dots a_n \in \mathcal{B}(X_{\mathcal{G}})$. Ta se riječ realizira kao neka konačna šetnja po grafu. Neka ona počinje u vrhu $F_X(w)$. Iz definicije od $\mathcal{G}$ slijedi da je $wa_1 \in \mathcal{B}(X)$, zatim nastavljamo dalje u novi vrh pa imamo da je $wa_1a_2 \in \mathcal{B}(X)$. Nakon konačno koraka dobivamo da je $wu \in \mathcal{B}(X)$ pa posebno i $u \in \mathcal{B}(X)$.

Za obratnu inkluziju, neka je $u \in \mathcal{B}(X)$. Možemo izbrati riječ w takvu da je $|w|$ veće od kardinaliteta skupa $\mathcal{C}_X$, odnosno broja vrhova u grafu $\mathcal{G}$, i da je $wu \in \mathcal{B}(X)$. Po konstrukciji, moguće je naći šetnju po bridovima od $\mathcal{G}$ koja realizira riječ wu. Takva šetnja nužno mora sadržavati ciklus u dijelu koji odgovara podriječi w. To nam omogućuje da proširimo šetnju u beskonačnost na lijevu stranu, jednostvno „vrteći” taj ciklus beskonačno puta. Kako svaki vrh u grafu $\mathcal{G}$ ima izlazni brid, moguće je proširiti šetnju koja realizira wu i na desno. Tako dobivamo element iz $X_{\mathcal{G}}$ koji za podriječ ima u pa je $u \in \mathcal{B}(X_{\mathcal{G}})$.

Pokažimo sada nužnost. Neka je dana prezentacija $\mathcal{G}$ od X i neka je $w \in \mathcal{B}(X)$. Za svaku moguću realizaciju riječi w kao konačne šetnje (koja se može proširiti do dvostrano beskonačne) po grafu $\mathcal{G}$ promotrimo njen završni vrh. Označimo taj skup završnih vrhova s T. Očigledno je sada $F_X(w)$ skup svih riječi koje se realiziraju konačnim šetnjama koje kreću iz nekog vrha iz T. Stoga dvije riječi s istim skupom T imaju isti skup sljedbenika. Kako ima samo konačno mnogo podskupova T skupa vrhova grafa $\mathcal{G}$, slijedi da je skup $\mathcal{C}_X$ konačan. $\square$

Primjer 2.3.12. *Neka je X prostor pomaka kao u primjeru 2.3.5. Sada iz gornjeg teorema odmah slijedi da to nije sofički pomak. Naime, skupovi $F_X(ab^m)$ su svi različiti za različite $m \in \mathbb{N}$ pa je skup $\mathcal{C}_X$ beskonačan.*

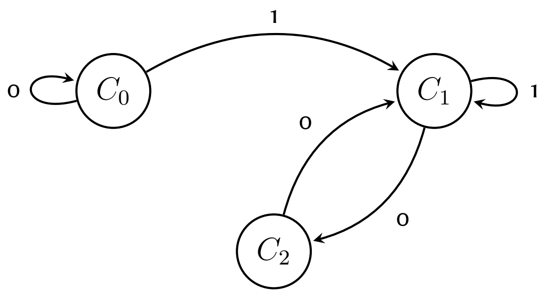
Primjer 2.3.13. *Neka je X parni pomak iz primjera 1.4.11. Na slici 2.1a se nalazi jedna njegova prezentacija. Nije se teško uvjeriti da postoje tri različita skupa sljedbenika, dana s*

$$\begin{aligned} C_0 &= F_X(0) = \{0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, \dots\}, \\ C_1 &= F_X(1) = \{0, 1, 00, 10, 11, 000, 001, \dots\}, \\ C_2 &= F_X(10) = \{0, 00, 01, 000, \dots\}. \end{aligned}$$

Uočimo da je $C_0 = C_1 \cup C_2$. Za svaku $w \in \mathcal{B}(X)$, lako provjerimo da je

$$F_X(w) = \begin{cases} C_0 & \text{ako } w \text{ ne sadrži 1-icu}, \\ C_1 & \text{ako } w \text{ završava na } 10^{2k} \text{ za neki } k \geq 0, \\ C_2 & \text{ako } w \text{ završava na } 10^{2k+1} \text{ za neki } k \geq 0, \end{cases}$$

pa su ta tri skupa sljedbenika i jedina tri. Na slici 2.2 je prikazana prezentacija istog prostora X preko grafa skupa sljedbenika iz teorema 2.3.11.



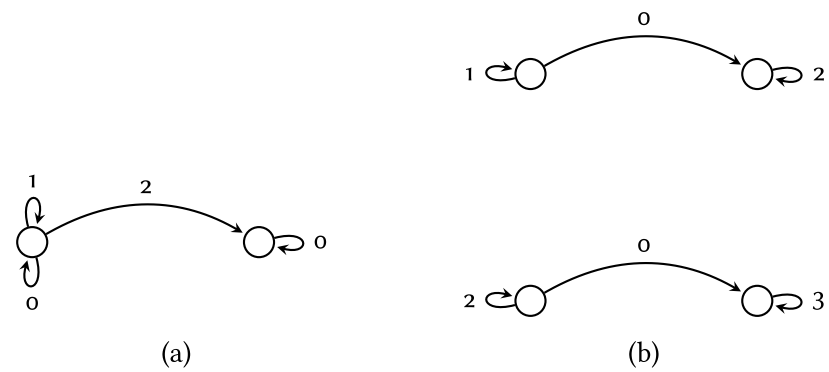
Slika 2.2: Graf skupa sljedbenika parnog pomaka

2.4 Dva primjera sofičkog prostora pomaka

U ovom poglavlju ćemo proučiti dva primjera strogo sofičkog pomaka. Prvi će nam poslužiti da pokažemo da tvrdnja teorema 2.2.9 ne mora vrijediti ako prostor pomaka X nije konačnog tipa. Drugi daje primjer strogo sofičkog pomaka u kojem teorem 2.2.9 vrijedi, što znači da ne možemo karakterizirati pomake konačnog tipa kao one koji zadovoljavaju taj teorem.

Primjer 2.4.1. *Neka je X sofički pomak dan prezentacijom na slici 2.3a. Označimo s A njegov podskup koji sadrži elemente $0^\infty, 1^\infty, s = 0^\infty.1^\infty, t = 1^\infty.20^\infty$ kao i sve njihove translate, da bi postigli σ-invarijantnost od A. Lako se provjerava da svaki konvergentan niz unutar A mora konvergirati ili prema 1^∞ ili prema 0^∞ pa je A zatvoren, odnosno prostor je pomaka. Štoviše, A je unutranje lančasto tranzitivan jer za dovoljno velike $N \in \mathbb{N}$ možemo postići da je $\sigma^N(s)$ po volji blizu 1^∞ i isto tako da je $\sigma^N(t)$ po volji blizu 0^∞.*

Po korolaru 2.2.10 postoji element $z \in \{0, 1, 2\}^{\mathbb{Z}}$ takav da je $\omega_\sigma(z) = A$. Pokažimo da takav z nikako ne može biti u X. Budući da je $t \in A$ to znači da se proizvoljno veliki centralni segmenti od t javljaju beskonačno puta u desnom repu od z. Zato se u z simbol 2 javlja beskonačno puta, što je nemoguće ukoliko je $z \in X$. Posebno, X nije pomak konačnog tipa.



Slika 2.3: Prezentacije sofičkih pomaka iz primjera 2.4.1 i 2.4.2

Primjer 2.4.2. *Neka je Y sofički pomak dan prezentacijom na slici 2.3b. Prvo pokažimo da je Y stogo sofički pomak. U suprotnom bi bio M-korak za neki $M \in \mathbb{N}$. Očigledno su riječi 02^M i 2^M0 iz $\mathcal{B}(Y)$ pa bi onda i riječ 02^M0 bila dopustiva u Y što je nemoguće jer svaki element u Y ima najviše jedno pojavljivanje simbola 0.*

S druge strane, nije teško pokazati da su jedini unutarnje lančasto tranzitivni podskupovi od Y ili $\{1^\infty\}$ ili $\{2^\infty\}$ ili $\{3^\infty\}$. Oni su očigledno ω-granični skupovi svog jedinog elementa pa je time pokazano da unutar Y vrijedi konkluzija iz teorema 2.2.9.

2.5 ω-granični skupovi šatorskog preslikavanja

Glavna motivacija za razvijanje teorije simboličke dinamike bila je razumijevanje kompleksnijih dinamičkih sustava. U ovom poglavlju cilj nam je primijeniti rezultate dobivene u 2.2 na klasu *šatorskih preslikavanja*. Taj primjer dat će generalnu ideju kako se aparat simboličke dinamike može primijeniti na konkretan dinamički sustav.

Prvo ćemo se podsjetiti osnovnih pojmova i rezultata *teorije tiještenja*, uglavnom prateći [Dev89]. Kako teorija tiještenja nije od primarnog interesa u ovom radu, osnovne rezultate navodimo bez dokaza.

Definicija 2.5.1. *Za neprekidno preslikavanje $f\colon [0,1] \to [0,1]$ kažemo da je* ***unimodalno*** *ukoliko je ispunjeno*

(1) $f(0) = f(1) = 0$,

(2) f *ima jedinstvenu točku maksimuma* $c \in (0,1)$,

(3) f *strogo raste na* $[0,c)$ *i strogo pada na* $(c,1]$.

Točku c iz gornje definicije zovemo ***kritičnom točkom*** *preslikavanja f.*

Tipični primjeri unimodalnih preslikavanja su kvadratna familija

$$F_\mu(x) = \mu x(1-x), \qquad \text{za } 0 < \mu \leq 4, \tag{2.12}$$

i šatorska preslikavanja

$$T_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda x & \text{ako } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \lambda(1-x) & \text{ako } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}, \qquad \text{za } 1 < \lambda \leq 2. \tag{2.13}$$

Definicija 2.5.2. *Neka je f unimodalno preslikavanje i neka je $x \in [0,1]$.* ***Itinerarom*** *točke x, u oznaci $S(x)$, nazivamo jednostrano beskonačni niz $s_0 s_1 s_2 \dots$ gdje je*

$$s_j = \begin{cases} 0 & \text{ako } f^j(x) < c \\ 1 & \text{ako } f^j(x) > c \\ C & \text{ako } f^j(x) = c \end{cases} \qquad \text{za } j \in \mathbb{N}_0. \tag{2.14}$$

Definicija 2.5.3. ***Nizom tiještenja****, u oznaci $K(f)$, nazivamo itinerar točke $f(c)$, odnosno $K(f) = S(f(c))$. U slučaju da je točka c periodička osnovnog perioda n imali bismo da je $K(f) = (s_0 \dots s_{n-2}C)^\infty$, no tada redefiniramo niz tiještenja i stavljamo da bude $K(f) = (s_0 \dots s_{n-2}*)^\infty$ gdje je $*$ ili 0 ili 1, odabrana na način da se u riječi $s_0 \dots s_{n-2}*$ nalazi paran broj jedinica.*

Napomena 2.5.4. *Može se pokazati da je tako definiran niz tiještenja zapravo jednak*

$$S(f(c)^-) = \sigma(S(c^+)) = \sigma(S(c^-)),$$

gdje je σ preslikavanje pomaka koje „briše prvi element niza", a $S(x^+) = \lim_{y \downarrow x} S(y)$ desni i $S(x^-) = \lim_{y \uparrow x} S(y)$ lijevi granični itinerar od x.

Sada ćemo na skupu itinerara definirati uređaj. Neka $s = s_0 s_1 \dots$ i $t = t_0 t_1 \dots$. Kažemo da s i t imaju neslaganje $n \in \mathbb{N}_0$ ako je $t_i = s_i$ za $0 \leq i < n$, ali $t_n \neq s_n$. Označimo s $\tau_n(s)$ broj jedinica u riječi $s_0 \dots s_n$.

Definicija 2.5.5. *Neka s i t imaju neslaganje n. Stavimo da je $s \prec t$ ukoliko je ispunjeno jedno od sljedećeg*

(1) $\tau_{n-1}(s)$ *je paran i* $s_n < t_n$,

(2) $\tau_{n-1}(s)$ *je neparan i* $s_n > t_n$.

Pri tome stavljamo da je $0 < C < 1$. Napomenimo još da se gornji uređaj na očigledan način proširuje i na konačne riječi iste duljine.

Da je gornji uređaj svrsishodan pokazuju sljedeća dva teorema.

Teorem 2.5.6. *Neka su $x, y \in [0,1]$ i f unimodalna funkcija. Ako je $S(x) \prec S(y)$, onda je $x < y$.*

Teorem 2.5.7. *Neka je f unimodalna. Ako za binarni niz $t = t_0 t_1 \dots$ vrijedi $\sigma^i(t) \prec K(f)$ za sve $i \in \mathbb{N}$ onda postoji $x \in [0,1]$ takav da je $S(x) = t$.*

Vratimo se sada šatorskom preslikavanju T_λ za $\lambda \in (1,2]$. Definicije i rezultati koje slijede, najvećim dijelom su dokazani u [Bar10].

Definicija 2.5.8. *Za $x \in [0,1]$ kažemo da je* ***predkritična točka*** *unimodalnog preslikavanja ukoliko postoji $k \in \mathbb{N}_0$ takav da je $f^k(x) = c$, gdje je c kritična točka.*

Lema 2.5.9. *Preslikavanje S koje svakoj točki segmenta $[0,1]$ pridružuje itinerar unimodalnog preslikavanja ima točke prekida u predkritičnim točkama. U svim ostalim točkama je neprekidno.*

Dokaz. Ukoliko je x predkritična točka takva da je $f^k(x) = c$, onda, ma koliko malu okolinu od x promatrali, ona mora sadržavati točke čiji se itinerari razlikuju na k-toj koordinati. Time je pokazano da S ima prekid u predkritičnim točkama.

Obratno, ukoliko x nije predkritična točka, onda su njene iteracije uvijek u otvorenom skupu, bilo u $[0,c)$, bilo u $(c,1]$. Zato možemo izabrati dovoljno malu okolinu točke x tako da se itinerari svih točaka iz te okoline podudaraju s itinerarom točke x na unaprijed zadanom broju koordinata. $\square$

Definicija 2.5.10. *Za unimodalno preslikavanje kažemo da je* ***lokalno predkritično*** *ukoliko za svaki otvoren interval* $U \subseteq [0,1]$ *postoji* $k \in \mathbb{N}$ *takav da* $f^k(U)$ *sadrži kritičnu točku.*

Lema 2.5.11. *Neka je* f *unimodalno preslikavanje s kritičnom točkom* c. *Definiramo* $\Sigma_f = \{S(x) : x \in [0,1]\}$. *Ako je* f *lokalno predkritično preslikavanje, onda je* S *injekcija i* $S^{-1} \colon \Sigma_f \to [0,1]$ *je neprekidno.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $x < y$. Tada postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $c \in f^k((x,y))$ i neka je to najmanji takav k. Očigledno je $f^k((x,y)) = (f^k(x), f^k(y))$ ili $f^k((x,y)) = (f^k(y), f^k(x))$ jer su za $i < k$ točke $f^i(x)$ i $f^i(y)$ elementi istog intervala monotonosti. Slijedi da se itinerari od x i y razlikuju na k-toj poziciji. Dakle S je injekcija.

Izaberimo sada $s = s_0 s_1 s_2 \cdots \in \Sigma_f$. Stavimo $I_n = \{y \in [0,1] : (S(y))_{[0,n)} = s_{[0,n)}\}$ za $n \in \mathbb{N}$. Očigledno za elemente $u < v$ iz I_n imamo da je nužno i $(u,v) \subseteq I_n$. Zapravo, slično kao u lemi 2.5.9 pokazujemo da je I_n otvoren interval, ukoliko s ne sadrži simbol C. Sada zbog injektivnosti imamo da je $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{S^{-1}(s)\}$. Posebno, to znači da duljine intervala I_n teže prema 0. No to znači da za svaki niz $(S(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ unutar Σ_f koji konvergira k s moramo imati da $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira k $S^{-1}(s)$. Dakle, S^{-1} je neprekidno u s.

U slučaju da s sadrži C, onda je to itinerar predkritične točke. Radi određenosti uzmimo da je $s_r = C$. Neprekidnost od S^{-1} u s tada je očigledna jer svaki niz koji se podudara sa s do r-te koordinate, odmah se mora podudarati i na ostalim koordinatama. Zapravo imamo da su itinerari predkritičnih točaka izolirane točke[1] u skupu Σ_f. Neprekidnost funkcije u izoliranoj točki slijedi po definiciji. □

Primjer 2.5.12. *Uočimo da je* T_λ *za* $\lambda \in (1,2]$ *lokalno predkritično preslikavanje. Naime, na intervalima monotonosti je to preslikavanje* šireće *pa ukoliko bi se dva različita elementa uvijek preslikavala s iste strane kritične točke, onda bi se udaljenost među njima povećavala s faktorom* λ *pri svakoj iteraciji. To je naravno nemoguće jer* λ^n *teži u beskonačnost za* $\lambda > 1$ *i* $n \to \infty$.

Prethodne dvije leme možemo povezati u jedan korolar.

Korolar 2.5.13. *Za lokalno predkritično unimodalno preslikavanje* f *i zatvoren,* f*-invarijantan podskup* $L \subseteq [0,1]$ *koji ne sadrži točku* $f(c)$ *imamo da je* $S \colon L \to S(L)$ *homeomorfizam koji je i preplitanje, pa posebno i topološka konjugacija.*

Dokaz. Dovoljno je uočiti da L ne može sadržavati niti jednu predkritičnu točku. Sada tvrdnja slijedi direktno iz lema 2.5.9 i 2.5.11. □

[1] Napomenimo da na Σ_f podrazumijevamo topologiju induciranu metrikom koja je definirana posve analogno kao i u slučaju prostora pomaka nad tri simbola.

Uočimo da uz oznake iz gornjeg korolara imamo da je prostor L kompaktan. Stoga je i $S(L)$ kompaktan. Zbog konjugiranosti, $S(L)$ mora biti i σ-invarijantan. Kako L ne sadrži predkritičnih točaka imamo da nizovi u $S(L)$ ne sadrže simbol C pa je $S(L)$ zapravo potpomak punog 2-pomaka. Čak i više, vrijedi sljedeća lema.

Lema 2.5.14. *Uz pretpostavke i oznake iz korolara 2.5.13 vrijedi da je $S(L)$ sadržan u potpomaku X konačnog tipa nad alfabetom $\{0,1\}$. Štoviše, za svaki element $s \in X$ postoji točka $x_0 \in [0,1]$ čiji je to ititnerar i udaljenost (prednje) orbite točke x_0 od bilo koje predkritične točke je strogo pozitivna.*

Dokaz. Kako je L kompaktan onda je udaljenost od L do $f(c)$ strogo pozitivna. To znači da postoje $u, v \in [0,1]$ takvi da je $l < u < v < f(c)$ za sve $l \in L$. Moguće je postići da u nije predkritična jer je skup predkritičnih točaka prebrojiv.

Zbog lokalne predkritičnosti imamo $S(l) \prec S(u) \prec S(v) \prec S(f(c))$. Kako je $K(f) = S(f(c)^-)$ onda puštanjem limesa $v \to f(c)$ dobivamo

$$S(l) \prec S(u) \prec K(f). \tag{2.15}$$

Označimo s n neslaganje od $S(u)$ i $K(f)$. Još jednom naglasimo da su nizovi $S(u)$ i $K(f)$ zapravo binarni nizovi (ponekad takve nizove zovemo *regularnima*). Označimo s $\mathcal{F}$ sve riječi w duljine $n+1$ za koje imamo $(K(f))_{[0,n]} \preceq w$. Definirajmo prostor pomaka konačnog tipa $X = X_{\mathcal{F}}$. Očigledno 2.15 povlači

$$S(l)_{[0,n]} \preceq S(u)_{[0,n]} \prec (K(f))_{[0,n]}. \tag{2.16}$$

Sada ponovno zbog f-invarijantnosti od L, slijedi σ-invarijatnost od $S(L)$ pa imamo da je svaka podriječ duljine $n+1$ od $S(l)$ strogo manja od $(K(f))_{[0,n]}$, a onda nije u $\mathcal{F}$. Dakle imamo da je $S(l)$ u n-koraku X za sve $l \in L$.

Dokažimo sada drugi dio leme. Neka je $s \in X$. Po definiciji prostora X imamo da je $(\sigma^k(s))_{[0,n]} \prec (K(f))_{[0,n]}$ za sve $k \in \mathbb{N}_0$. Odnosno, $\sigma^k(s) \prec K(f)$ za sve $k \in \mathbb{N}_0$ pa po teoremu 2.5.7 imamo da postoji $x_0 \in [0,1]$ čiji je s itinerar. Konačno, ukoliko udaljenost prednje orbite x_0 od skupa predkritičnih točaka ne bi bila strogo pozitivna, onda bi imali podniz $(f^{p_k}(x_0))_{k\in\mathbb{N}}$ koji bi konvergirao nekoj predkritičnoj točki. To pak znači da bi za neki $j \in \mathbb{N}_0$ imali da $(f^{p_k+j}(x_0))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira k $f(c)$, i to naravno, s lijeve strane. Posebno bi imali da $(S(f^{p_k+j}(x_0)))_{k\in\mathbb{N}} = (\sigma^{p_k+j}(s))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira k $S(f(c)^-) = K(f)$. No to je nemoguće budući da se svaki translat od s razlikuje od $K(f)$ na nekoj od prvih $n+1$ koordinata. $\square$

Sada je sve spremno za dokaz glavnog rezultata ovog poglavlja.

Teorem 2.5.15. *Neka je f lokalno predkritično unimodalno preslikavanje i neka je L neprazan, zatvoren, f-invarijantan podskup od $[0,1]$ koji ne sadrži točku $f(c)$. Tada je $L = \omega_f(x_0)$ za neki $x_0 \in [0,1]$ ako i samo ako je L unutarnje lančasto tranzitivan.*

Dokaz. Već smo prije vidjeli da ω-granični skupovi moraju biti unutarnje lančasto tranzitivni. Obratno neka je L unutranje lančasto tranzitivan. Uočimo da su L i $S(L)$ kompaktni metrički prostori. Stoga su preslikavanja S i S^{-1} uniformno neprekidna pa lako pokažemo da je L unutarnje lančasto tranzitivan ako i samo ako je $S(L)$ unutarnje lančasto tranzitivan.

Lema 2.5.14 daje prostor pomaka konačnog tipa X koji sadrži $S(L)$. Sada po teoremu 2.2.9 i napomeni 2.2.11 imamo da je $S(L) = \omega_\sigma(s)$ za neki binarni niz $s = s_0 s_1 s_2 \cdots \in X$. Ponovnom primjenom leme 2.5.14 dobivamo da postoji $x_0 \in [0,1]$ takav da je $S(x_0) = s$. Preostaje dokazati da je $\omega_f(x_0) = L$.

Neka je $l \in L$. Tada imamo podniz $(\sigma^{p_k}(s))_{k\in\mathbb{N}} = (S(f^{p_k}(x_0)))_{k\in\mathbb{N}}$ koji konvergira k $S(l)$. Neprekidnost od S^{-1} daje da $(f^{p_k}(x_0))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira k l pa je $l \in \omega_f(x_0)$. Time je pokazano $L \subseteq \omega_f(x_0)$.

Budući da po lemi 2.5.14 (pred)kritična točka ne može biti gomilište orbite od x_0 imamo da $c \notin \omega_f(x_0)$ pa niti $f(c)$ nije u $\omega_f(x_0)$, odnosno skup $\omega_f(x_0)$ zadovoljava uvjete korolara 2.5.13 pa je S homeomorfizam na tom, naizgled većem skupu od L.

Sada možemo dokazati i obratnu inkluziju. Ako je $l \in \omega_f(x_0)$, onda imamo podniz $(f^{p_k}(x_0))_{k\in\mathbb{N}}$ koji konvergira k l. Zbog homeomorfnosti od S slijedi da $(S(f^{p_k}(x_0)))_{k\in\mathbb{N}} = (\sigma^{p_k}(s))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira k $S(l)$. Iz toga slijedi da je $S(l) = S(l')$ za neki $l' \in L$. Kako je S homeomorfizam na skupu $\omega_f(x_0)$ koji sadrži i l i l' imamo da je $l = l' \in L$. Time je teorem dokazan. $\square$

Sada kao posljedicu prethodnog teorema i primjera 2.5.12 dobivamo

Korolar 2.5.16. *Za $\lambda \in (1,2]$ ω-granični skupovi šatorskog preslikavanja T_λ koji ne sadrže predkritičnih točaka upravo su oni koji su uz to i unutarnje lančasto tranzitivni.*

Bibliografija

[Bar10] Andrew D. Barwell, *A characterization of ω-limit sets of piecewise monotone maps of the interval*, Fund. Math. **207** (2010), no. 2, 161–174. MR 2586009 (2011k:37059)

[BGKR10] Andrew Barwell, Chris Good, Robin Knight, and Brian E. Raines, *A characterization of ω-limit sets in shift spaces*, Ergodic Theory Dynam. Systems **30** (2010), no. 1, 21–31. MR 2586343 (2011e:37026)

[Dev89] Robert L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, Addison-Wesley Studies in Nonlinearity, Addison-Wesley Publishing Company Advanced Book Program, Redwood City, CA, 1989. MR 1046376 (91a:58114)

[HSZ01] Morris W. Hirsch, Hal L. Smith, and Xiao-Qiang Zhao, *Chain transitivity, attractivity, and strong repellors for semidynamical systems*, J. Dynam. Differential Equations **13** (2001), no. 1, 107–131. MR 1822214 (2002a:37014)

[LM95] Douglas Lind and Brian Marcus, *An introduction to symbolic dynamics and coding*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995. MR 1369092 (97a:58050)

Sažetak

U ovom radu dajemo pregled osnovnih rezultata simboličke dinamike. Uvodimo prostor pomaka i preslikavanje pomaka. Posebnu pažnju posvećujemo prostorima pomaka konačnog tipa. Motivacija koja leži u pozadini jest da se dinamika unimodalnih preslikavanja, u nekim slučajevima, može poistovjetiti s dinamikom preslikavanja pomaka na prostorima pomaka konačnog tipa.

U drugom dijelu dajemo karakterizaciju ω-graničnih skupova u prostorima pomaka konačnog tipa. Ispostavlja se da su to upravo unutarnje lančasto tranzitivni potpomaci. Konačno, na primjeru pokazujemo kako se razvijena teorija može iskoristiti za razumijevanje ω-graničnih skupova šatorskog preslikavanja.

Summary

In this thesis we revise basic results of the symbolic dynamics. We introduce shift spaces and shift map with strong emphasis on the shifts of finite type. The motivation behind this is the fact that, in some cases, the dynamics of unimodal maps is same as the dynamics of the shift map on the shift of finite type.

In the second chapter we give characterization of ω-limit sets in shift spaces of finite type. It turns out that those are precisely internally chain transitive subshifts. Finally, we show how symbolic representation can be used to understand ω-limit sets of tent map.

Životopis

Rođen sam 10. kolovoza 1988. u Splitu. Osnovnu školu pohađao sam u Gatima i Omišu, a srednjoškolsko obrazavanje nastavio u III. gimnaziji u Splitu. Redovito sam sudjelovao na natjecanjima iz matematike i fizike, do državne razine. Zanimanje za matematiku prevladava, pa 2007. godine upisujem preddiplomski studij matematike, a 2010. diplomski studij teorijske matematike. Tijekom studija sam bio demonstrator iz niza kolegija, sudjelovao kao predstavnik fakulteta na međunarodnom natjecanju u Češkoj, a za izniman uspjeh u studiju sam i nagrađen od strane fakulteta. Do 2010. godine sam bio stipendist Ministarstva znanosti, obrazovanja i športa u 'A' kategoriji, a od 2011. godine sam stipendist Nacionalne zaklade za potporu učeničkom i studentskom standardu.